Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Teorías de cohomología de coálgebras

Marco Andrés Farinati

Directora de Tesis

Dra. Andrea L. Solotar

Lugar de Trabajo

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Tesis presentada para optar por el título de

Doctor de la Universidad de Buenos Aires

1999

Introducción

El espíritu de esta tesis consiste en encarar el estudio de coálgebras sobre un cuerpo a través de técnicas del álgebra homológica. Las coálgebras aparecen naturalmente en topología algebraica (de hecho, las coálgebras diferenciales graduadas) cuando se define el complejo singular $S_*(X;k)$ de un espacio topológico X con coeficientes en un anillo k, por lo tanto $H_*(X;k) := H_*(S_*(X,k))$ es una k-coálgebra (graduada). Si bien la noción de álgebra pueda parecer más natural y geométrica (imaginando al álgebra A como el anillo de funciones de una variedad X), cuando el espacio geométrico X tiene estructura de monoide, entonces su álgebra de funciones es una biálgebra (es decir un álgebra que también es coálgebra y donde las dos estructuras están relacionadas). En ese caso, no tiene sentido tomar una postura o punto de vista sólo por una estructura o sólo por la otra pues las dos estructuras aparecen simultáneamente. También hay situaciones, como en la teoría de operads, en que los enunciados naturales están dados en términos de estructuras de coálgebras, y si se quiere dualizar dichos enunciados para enunciar las proposiciones y definiciones sólo en términos de álgebras, se llega muchas veces a innecesarias hipótesis de finitud, que no aparecen en los enunciados originales. A modo de ejemplo, podemos citar el teorema de formalidad de Kontsevich [Ko 97], que trata del problema de encontar una deformación a partir de una estructura de Poisson. Los trabajos de Kontsevich están enunciados en términos de coálgebras y condiciones cohomológicas, esto motiva tanto al estudio de coálgebras como al de las teorías de cohomología sobre las mismas.

La teoría central de cohomología en esta tesis será $Hoch^*$ [Doi 81], que es el análogo a la homología de Hochschild de álgebras asociativas. Una gran parte de los resultados de este trabajo han sido publicados en revistas y/o libros científicos, por lo que en algunos casos, presentaremos los resultados y nos referiremos a las publicaciones para sus demostraciones completas; algunos de los resultados publicados irán acompañados de comentarios en donde se muestran algunas mejoras con respecto a lo que se encuentra en la literatura.

La primera idea cuando se estudian las coálgebras es, en vez de estudiar la coálgebra misma, estudiar su categoría de corepresentaciones, es decir, la categoría de comódulos sobre la coálgebra dada. Este punto de vista ha demostrado ser fructífero en el caso de anillos o álgebras. Hay una teoría desarrollada por Takeuchi [Tak 77a] que tiene (si bien con demostraciones muchas veces completamente diferentes) enunciados duales a los de la teoría de Morita. Se tiene así una caracterización de las equivalencias de categorías de comódulos, y la pregunta natural es si las teorías de cohomología $Hoch^*$ y H^* son invariantes por estas equivalencias. La respuesta es afirmativa, tal como se demuestra en [F-S 98a]. Más aún, en [F-S 99b] se define la cohomología cíclica de coálgebras (HC^*), y entre otras cosas se demuestra que HC^* es también invariante por equivalencias Morita - Takeuchi.

Una técnica de indudable valor en álgebra es la noción de localización. La localización es una herramienta cómoda porque existen resultados de localización-globalización, es decir, para demostrar un enunciado, muchas veces es equivalente demostrar el enunciado análogo en el contexto local, y una vez ahí, uno puede utilizar resultados adicionales pues los anillos locales tienen mas propiedades que los anillos arbitrarios en general (por ejemplo todos los módulos proyectivos de tipo finito sobre un anillo local son libres, el lema de Nakayama, etc.). Uno de los principales problemas de la localización de coálgebras es que si se busca un funtor de localización con propiedades duales a las de la localización de álgebras, rápidamente se puede caer en una categoría de coálgebras topológicas y representaciones continuas, y esta última categoría ya no es mas una categoría abeliana. Sin embargo, las teorías de cohomología pueden definirse allí y se recuperan bastantes de las propiedades generales de las teorías de cohomología en categorías abelianas (en el sentido de que son funtores (co)homológicos, ver [Gro 57]). En [F-S 98b] se estudia el comportamiento de $Hoch^*$ con respecto a las localizaciones en situaciones tan generales como sea posible. Queda sin embargo un punto interesante no tratado en [F-S 98b], y es que en casos particulares, la localización de una coálgebra 'algebraica' es a veces también una coálgebra algebraica en vez de una coálgebra topológica. Es decir que dada una coálgebra C con comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$, la imagen de la comultiplicación de la coálgebra localizada $\Delta : C_{[S]} \to C_{[S]}\widehat{\otimes}C_{[S]}$ se factoriza por $C_{[S]} \otimes C_{[S]}$, donde $C \otimes C$ (resp. $C_{[S]} \otimes C_{[S]}$) denota el producto tensorial algebraico y $\widehat{\otimes}$ denota la completación del producto tensorial algebraico con respecto a una topología conveniente. Es frecuente que en estos casos particulares también sea fácilmente verificable que el morfismo de localización $\pi : C_{[S]} \to C$ sea coplayo, condición indispensable para demostrar la compatibilidad de $Hoch^*$ con la localización.

Un caso particularmente agradable es cuando la coálgebra C es coconmutativa, y los subconjuntos por los cuales se localiza son ideales maximales del álgebra dual C^*. En este caso la técnica de localizar no es otra cosa que la de descomponer a la coálgebra en componentes irreducibles, dichas componentes quedan indexadas por los elementos group-like (que están en correspondencia con ideales maximales de C^*). Los problemas globales de la coálgebra se pueden entonces atacar en forma local, y luego reunir los datos locales para obtener resultados globales.

En el caso coconmutativo, $Hoch^*$ tiene un sentido geométrico como lo demuestra por ejemplo el cálculo de $Hoch^*$ para la coálgebra $\mathcal{D}(X) =$ "distribuciones sobre una variedad diferenciable real compacta X"(ver [F-S 99b]). Para el caso de coálgebras coconmutativas algebraicas, una teoría de 'suavidad', definida a través de extensiones de coálgebras coconmutativas puede ser desarrollada y se obtienen resultados análogos al del famoso teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg que dice que si un álgebra A (esencialmente de tipo finito, sobre un cuerpo perfecto) es suave, entonces $HH_*(A)$ es isomorfa a $\Lambda^*_A(\Omega^1(A))$, el álgebra exterior en el módulo de diferenciales de Kähler (en particular $HH_n(A) = 0$ para n suficientemente grande). El resultado obtenido (ver [F-S 99a]) es que si C es una coálgebra coconmutativa suave (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado), entonces $Hoch^*(C)$ es isomorfa a la coálgebra exterior en $Hoch^1(C)$, que es a su vez siempre isomorfo a un objeto Ω^1_C, universal con respecto a las coderivaciones.

Finalmente, viendo que las teorías de cohomología se aplican naturalmente a coálgebras diferenciales graduadas, se extiende la teoría a este tipo de coálgebras y se estudia la categoría derivada de las corepresentaciones diferenciales graduadas. Esta categoría derivada es el dominio natural en donde se aplican los funtores homológicos, es por esto esperable que las teorías de cohomología dependan de estas categorías derivadas, en vez de simplemente las categorías de corepresentaciones. Un ejemplo básico es el siguiente: sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras diferenciales graduadas que es un quasi-isomorfismo. Se puede considerar entonces a C como un "modelo"de D, y sería deseable poder intercambiar, a la hora de calcular $Hoch^*$, a C por D o viceversa. El problema de poder intercambiar una coálgebra por un modelo tiene una respuesta afirmativa (ver Teorema 7.26) en el siguiente sentido: las categorías derivadas $\mathcal{D}(C)$ y $\mathcal{D}(D)$ son equivalentes (en tanto que categorías trianguladas), y la equivalencia induce un isomorfismo $f^* : Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$. En un caso genérico, en donde C y D son dos coálgebras diferenciales graduadas tales que $\mathcal{D}(C)$ y $\mathcal{D}(D)$ son equivalentes, se tienen resultados parciales que dan condiciones suficientes para asegurar por un lado un teorema tipo Morita-Takeuchi de las categorías derivadas (es decir, caracterizar las equivalencias que pueden ocurrir entre $\mathcal{D}(C)$ y $\mathcal{D}(D)$), y a partir de esto, llegar a demostrar que $Hoch^*(C)$ y $Hoch^*(D)$ son isomorfas. Para llegar a estos teoremas se realizan varias construcciones y definiciones, como la noción de quasi-finito en un sentido generalizado y la coálgebra diferencial de coendomorfismos, que juega un rol fundamental en la teoría de Morita de las categorías derivadas. Naturalmente, para poder enunciar los resultados, se describe brevemente la categoría de homotopía y la categoría derivada de comódulos diferenciales graduados y se recuerdan las construcciones de categorías derivadas de categorías abelianas (en el sentido de [Ver 77]) y de categorías diferenciales graduadas (en el sentido de [Ke 94a]).

El contenido de los capítulos es el siguiente:

El capítulo 1 es introductorio. Se recuerdan las definiciones de los principales objetos que aparecerán en el resto del trabajo y se dan ejemplos en donde las nociones definidas aparecen naturalmente.

El capítulo 2 trata de las teorías de cohomología de coálgebras $Hoch^*$ y H^*. Se demuestra la invariancia de estas teorías por equivalencias de las categorías de representaciones y se calculan los grupos de cohomología para algunos de los ejemplos, tanto algebraicos como topológicos. La parte general de este capítulo está dedicada al problema de la localización de coálgebras.

El capítulo 3 trata sobre la cohomología de una clase de coálgebras coconmutativas, que son las que hemos denominado *suaves*. Se obtienen resultados análogos a los que caracterizan la homología de Hochschild de álgebras suaves en términos del álgebra exterior en los diferenciales de Kähler (Teorema de Hochschild - Kostant - Rosenberg).

En el capítulo 4 damos la definición de cohomología cíclica de coálgebras. Allí se analizan ejemplos y se estudian propiedades de esta teoría, en particular su relación con $Hoch^*$ y su invariancia por equivalencias de categorías de comódulos.

En el capítulo 5 se extiende lo realizado en las secciones precedentes al caso de coálgebras no necesariamente counitarias.

Con el objetivo de poder reemplazar una coálgebra dada C por un modelo de C (y en consecuencia los comódulos sobre C por comódulos sobre el modelo de C), a partir del capítulo 6 comienza el estudio de objetos diferenciales graduados. Se dan allí las definiciones de este tipo de objetos. Aparecen entonces naturalmente la categoría de homotopía $\mathcal{H}(C)$ y la categoría derivada $\mathcal{D}(C)$.

Los capítulos 7 y 8 tratan del estudio de la categoría derivada $\mathcal{D}(C)$ y $\mathcal{D}(C)^+$. Se define una subcategoría plena de la categoría de homotopía $\mathcal{H}(C)$ que resultará equivalente a $\mathcal{D}(C)^+$ y cuyos morfismos son más manejables que los de $\mathcal{D}(C)$. Esta subcategoría, en el caso de un álgebra A, es la categoría de objetos cerrados de $\mathcal{H}(A)$, es decir, aquellos objetos de $\mathcal{H}(A)$ tales que todo quasi-isomorfismo que lo tiene como dominio es una equivalencia homotópica. En el contexto de las coálgebras, existen dos formas de definir un objeto cerrado, una de ellas a través del Hom ("cerrado") y otra a través de la resolución standard ("serrado"). Para caracterizar la categoría derivada, la noción de cerrado tiene tautológicamente buena relación con el Hom mientras que la definición a través de la resolución standard muestra que existen suficientes serrados. La ambigüedad de contar con dos posibles definiciones de objeto cerrado desaparece cuando se demuestra (bajo hipótesis de acotación de los complejos) la equivalencia entre cerrado y serrado, lo que permite caracterizar la categoría derivada de una coálgebra diferencial graduada. Teniendo una buena noción de objetos cerrados se demuestra el Teorema 7.24, que da una caracterización de las equivalencias derivadas entre las categorías de comódulos. El teorema 7.26 muestra a partir de esta caracterización, que un quasi-isomorfismo entre coálgebras diferenciales graduadas induce una equivalencia entre las categorías derivadas de las respectivas categorías de comódulos.

Se estudia bajo qué condiciones el funtor $X\square_C-$ tiene un adjunto a izquierda (en el caso diferencial graduado) y cuándo el funtor derivado de éste da una equivalencia, obteniéndose resultados más completos (Teorema 7.32 y Corolario 8.9) para el caso de dos coálgebras concentradas en grado cero. A partir del Corolario 8.13, se demuestra un teorema de invariancia de $Hoch^*$. Finalmente en el capítulo 9 se extienden las teorías de cohomología al caso diferencial graduado y se prueban teoremas de invariancia.

Índice

1. Coálgebras **1**
- 1.1. Coálgebras . . . 1
- 1.2. Comódulos . . . 3

2. Los funtores $Hoch^*$ y H^* **8**
- 2.1. Invariancia Morita - Takeuchi . . . 9
- 2.2. Ejemplos de cálculos . . . 11
  - 2.2.1. (co)Álgebras de dimensión finita . . . 11
  - 2.2.2. La coálgebra tensorial TV . . . 12
  - 2.2.3. La coálgebra coconmutativa $sh(V)$ . . . 14
  - 2.2.4. El dual restringido $k[x]^0$ . . . 14
- 2.3. Las distribuciones $\mathcal{D}(X)$, un ejemplo topológico . . . 15
- 2.4. Localización . . . 16

3. Extensiones y coderivaciones **25**
- 3.1. Extensiones y H^2 . . . 25
- 3.2. Extensiones coconmutativas y H^2_{Har} . . . 26
- 3.3. Coálgebras suaves . . . 28
- 3.4. Coderivaciones y Ω^1_C . . . 29
- 3.5. Sucesiones exactas del Ω^1_C . . . 32
- 3.6. Teorema de estructura de coálgebras coconmutativas suaves . . . 37
- 3.7. $Hoch^*$ y coálgebras suaves . . . 40

4. Homología cíclica **43**
- 4.1. Cohomología cíclica de coálgebras . . . 44
- 4.2. Sucesión SBI . . . 45
- 4.3. El ejemplo TV . . . 46
- 4.4. El ejemplo $\mathcal{D}(X)$ . . . 48
- 4.5. Invariancia Morita - Takeuchi . . . 52

5. De las coálgebras no counitarias y de un teorema de escisión a la Wodzicki para $Hoch^*$ y HC^* **54**
- 5.1. Coálgebras no counitarias . . . 54
- 5.2. Coálgebras H-counitarias . . . 56
- 5.3. El teorema de escisión . . . 57

6. Extensión de la teoría al caso diferencial graduado **61**
- 6.1. Coálgebras diferenciales graduadas . . . 61
- 6.2. Comódulos diferenciales graduados y $Chain(C)$ . . . 63
- 6.3. Categoría derivada de una coálgebra, $\mathcal{H}(C)$ y $\mathcal{D}(C)$ . . . 64
  - 6.3.1. La categoría $\mathcal{H}(C)$ . . . 64

6.4. Categorías trianguladas y $\mathcal{H}(C)$ 65
6.4.1. La categoría $\mathcal{D}(C)$ 69

7. Estudio de la categoría $\mathcal{D}(C)$ **70**
7.1. Objetos cerrados 70
7.2. Adjunción 70
7.3. La resolución standard 72
7.4. Límites inversos 78
7.5. Sobre cerrados y serrados 81
7.6. Equivalencia de las definiciones “cerrado” y “serrado” 83
7.7. Quasi-isomorfismos de coálgebras diferenciales graduadas, ejemplo de equivalencia derivada 90
7.8. Bicomódulos basculantes 93

8. Hacia resultados tipo Morita **97**
8.1. Definición de comódulo quasi-finito generalizado 97
8.2. Se quiere ver que ${}_D X_{\mathcal{E}} \square^R_{\mathcal{E}} -$ es una equivalencia. 99
8.3. Más sobre (co)tiltings generalizados 102
8.4. Lemas de extensión de funtores 103

9. Homología de Hochschild y cíclica de coálgebras diferenciales graduadas **105**
9.1. CoHomología de Hochschild 105
9.2. CoHomología Cíclica 108

1. Coálgebras

1.1. Coálgebras

Una coálgebra puede ser definida en cualquier categoría monoidal. Dada una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes)$ con objeto unidad k respecto de $\otimes$, una coálgebra, o mejor dicho una k-coálgebra, es un objeto C en $\mathcal{C}$ junto con dos morfismos $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\epsilon : C \to k$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

(coasociatividad)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

(counidad)
$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "\epsilon\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] & k \otimes C \arrow[d, equal] \\ C \otimes k \arrow[r, equal] & C \arrow[ul, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

Si C y D son dos coálgebras en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes)$, diremos que un morfismo $f : C \to D$ en la categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo de coálgebras en caso de que $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$.

Ejemplos: Los ejemplos fundamentales de categorías monoidales que manejaremos en este trabajo son los siguientes:

1. La categoría Vec_k de espacios vectoriales sobre un cuerpo k con $\otimes = \otimes_k$, o la categoría ${}_kmod$ de módulos sobre un anillo conmutativo k (o de bimódulos simétricos) con $\otimes = \otimes_k$.

2. La categoría ${}_{\mathbb{Z}}Vec_k$ de espacios vectoriales sobre un cuerpo k que sean $\mathbb{Z}$-graduados con el producto tensorial (sobre k) graduado.

3. La categoría $E.L.C.$ de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales localmente convexos completos con el producto tensorial $\otimes = \widehat{\otimes}_\pi$, donde $\widehat{\otimes}_\pi$ denota la completación del producto tensorial algebraico $\otimes_{\mathbb{C}}$ con respecto a la topología proyectiva.

Como resultado de la definición general, los ejemplos de categorías monoidales dados anteriormente dan lugar a la noción de coálgebra usual para $(Vec_k, \otimes_k)$, de coálgebra graduada para $({}_{\mathbb{Z}}Vec_k, \otimes_k)$ y de coálgebra topológica para $(E.L.C., \widehat{\otimes}_\pi)$.

Como ejemplos mas concretos de coálgebras, si A es una k-álgebra unitaria de dimensión finita sobre un cuerpo k, entonces $A^* = Hom_k(A, k)$ es una coálgebra con los morfismos adjuntos de la multiplicación $m : A \otimes A \to A$ y la unidad $\eta : k \to A$. Si A es una k-álgebra de dimensión arbitraria, la construcción $(-)^0$ o dual restringido (ver [Sw 69]) da origen a una coálgebra de manera análoga al dual. Si A es una k-álgebra graduada, $A = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ y cada A_n es un k-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n^*$ es una coálgebra graduada, con el morfismo (grado a grado) adjunto al de la multiplicación.

Si X es un espacio topológico, entonces $H_*(X, k)$ (el k-módulo $\mathbb{Z}$-graduado dado por la homología singular de X a coeficientes en k) es una k-coálgebra graduada cuyos morfismos de estructura están dados por el inducido por el morfismo diagonal $X \to X \times X$

(más la identificación del teorema Eilemberg-Zilber $H_*(X \times X) \cong H_*(X) \otimes H_*(X)$) y el morfismo constante $X \to *$ (donde $*$ denota el espacio topológico formado por un único punto).

Si X es una variedad suave compacta y $\mathcal{D}(X)$ son las distribuciones (complejas) sobre X, i.e. $\mathcal{D}(X) := C^\infty(X)'$ con la topología fuerte del dual (que es una topología nuclear), de manera análoga al ejemplo anterior, la identificación $\mathcal{D}(X)\widehat{\otimes}\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(X \times X)$ (ver por ejemplo [Trè 67]) junto con el morfismo diagonal $X \to X \times X$ y la función constante proveen a $\mathcal{D}(X)$ de una estructura de $\mathbb{C}$-coálgebra topológica.

Si G es un grupo de Lie (de dimensión finita) entonces $C^\infty(G)$ es una coálgebra topológica con la estructura dada por la multiplicación junto a la identificación

$$C^\infty(G \times G) \cong C^\infty(G)\widehat{\otimes}C^\infty(G);$$

más precisamente, si $f \in C^\infty(G)$, se define

$$\Delta(f)(x, y) := f(x.y), \ \ \epsilon(f) := f(1_G).$$

Si G es un grupo cualquiera, entonces $k[G]$ (el álgebra de grupo con coeficientes en k) además de una estructura de álgebra tiene también una estructura de coálgebra, la comultiplicación está dada por la diagonal junto con la identificación

$$k[G \times G] \cong k[G] \otimes k[G],$$

más precisamente

$$\Delta\left(\sum_{g\in G} \lambda_g.g\right) := \sum_{g\in G} \lambda_g.g \otimes g,$$

y la counidad está dada por el morfismo constante 1_G más la identificación $k[\{1_G\}] \cong k$, en fórmulas

$$\epsilon\left(\sum_{g\in G} \lambda_g.g\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g.$$

Como la diagonal $G \to G\times G$ y el morfismo nulo $G \to \{1_G\}$ son morfismos de grupo, tanto Δ como ϵ son morfismos de álgebra, $k[G]$ es en realidad lo que se llama una **biálgebra** pues es a la vez álgebra y coálgebra y sus dos estructuras son compatibles.

Otro ejemplo: Si bien la noción de biálgebra pueda parecer una estructura bastante particular, ésta da origen a toda una clase de ejemplos de categorías monoidales, que es el lugar en donde se encuentran las coálgebras.

Sea H una biálgebra, para fijar ideas supongamos que H es una biálgebra en la categoría $(Vec_k, \otimes_k)$ (con la trenza usual de permutación). Entonces la subcategoría de Vec_k dada por los H-módulos es monoidal, tomando como $\otimes$ de nuevo $\otimes_k$. Para ver esto, lo único que hace falta verificar es que si M y N son dos H-módulos, entonces $M \otimes N$ también es un H-módulo de manera tal que valgan las propiedades de asociatividad

$((M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \cong M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$, isomorfismo de H-módulos) y unidad (k es un H-módulo y además $M \otimes k \cong M \cong k \otimes M$ como H-módulos). Dados M y N dos H-módulos, se define sobre $M \otimes N$ la siguiente acción de H:

$$h.(m \otimes n) := \sum_{(h)} h_1.m \otimes h_2.m$$

en donde $h \in H,\ m \in M,\ n \in N$ y $\sum_{(h)} h_1 \otimes h_2$ es una escritura de $\Delta(h)$.

Por el momento no nos detendremos más en este tipo de ejemplos, lo que agregaremos es que esta definición de acción puede ser dadas en términos de diagramas de la manera siguiente como la composición de los siguientes morfismos k-lineales:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes (M \otimes N) \arrow[r, "\Delta\otimes id\otimes id"] & H \otimes H \otimes M \otimes N \arrow[r, "id\otimes\tau\otimes id"] & H \otimes M \otimes H \otimes N \arrow[d, "\mu_M\otimes\mu_N"] \\
& & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

en donde los μ's son los morfismos de estructura y τ es el morfismo que intercambia el orden de los factores en el producto tensorial. Para obtener entonces una categoría monoidal a partir de las representaciones de una biálgebra, la estructura extra que debe tener la categoría monoidal de origen es un morfismo $\tau : X \otimes Y \to Y \otimes X$ para cada par de objetos X, Y. Naturalmente este morfismo debe cumplir ciertas condiciones para que la acción definida según el diagrama anterior sea verdaderamente una acción. La noción de *categoría trenzada* $(\mathcal{C}, \otimes, \tau)$ donde $(\mathcal{C}, \otimes)$ es una categoría monoidal y τ es una transformación natural que a cada par de objetos $X,\ Y \in \mathcal{C}$ le asigna un morfismo $\tau_{X,Y} X \otimes Y \to Y \otimes X$ que verifica el diagrama de trenzas, es justamente la que surge de esta idea, ver por ejemplo [Mont 93].

Otro ejemplo de biálgebra: Sea g una k-álgebra de Lie. Entonces el álgebra envolvente $\mathcal{U}(g)$ es una biálgebra, la comultiplicación está dada por extender multiplicativamente la fórmula $\Delta(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x$ donde $x \in g \subset \mathcal{U}(g)$ y la counidad proviene del morfismo $g \to 0$. La categoría de g-módulos es equivalente a la categoría de $\mathcal{U}(g)$-módulos y es entonces otro ejemplo de categoría monoidal.

1.2. Comódulos

La definición de comódulos viene siempre inmediatamente después de la definición de coálgebra, así como la noción de módulo (o de representación) viene junto a la noción de anillo.

Contando con una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes)$ y un objeto $C \in Obj(\mathcal{C})$ que sea una coálgebra, un comódulo (a izquierda) es un objeto M de la misma categoría $\mathcal{C}$ junto con un morfismo de estructura $\rho^- : M \to C \otimes M$ que verifica las siguientes dos condiciones de coasociatividad y counitaridad:

(coasociatividad)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho^-"] \arrow[d, "\rho^-"] & C\otimes M \arrow[d, "id\otimes\rho^-"] \\ C\otimes M \arrow[r, "\Delta\otimes id"] & C\otimes C\otimes M \end{tikzcd}$$

(counitariedad)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho^-"] \arrow[dr, equal] & C\otimes M \arrow[d, "\epsilon\otimes id"] \\ & k\otimes M \end{tikzcd}$$

Análogamente se definen comódulos a derecha (la convención para el morfismo de estructura en este caso es llamarlo ρ^+).

Si $f : M \to N$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ entre dos C-comódulos, diremos que f es un morfismo de comódulos en caso de que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^-_M"] & N \arrow[d, "\rho^-_N"] \\ C\otimes M \arrow[r, "id_C\otimes f"] & C\otimes N \end{tikzcd}$$

Denotaremos por $Com_C(M,N)$ al conjunto de morfismos de C-comódulos de M en N.

Llamaremos ${}^C\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^C$) a la categoría de C-comódulos a izquierda (resp. a derecha).

Si C y D son dos coálgebras y M es un C-comódulo a izquierda y D-comódulo a derecha, diremos que las dos estructuras son compatibles (o que M es un C-D-bicomódulo) en caso de que ρ^- sea morfismo de D-comódulos, o equivalentemente que ρ^+ sea morfismo de C-comódulos, lo cual se escribe mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho^+"] \arrow[d, "\rho^-"] & M\otimes D \arrow[d, "\rho^-\otimes id"] \\ C\otimes M \arrow[r, "id\otimes\rho^+"] & C\otimes M\otimes D \end{tikzcd}$$

De la definición de coálgebra se sigue que toda coálgebra es comódulo sobre si misma, tanto a derecha como a izquierda, tomando $\rho^+ = \rho^- = \Delta$. La coasociatividad implica que las dos estructuras son compatibles.

Si $\mathcal{C}$ es la categoría de k-espacios vectoriales y C es una k-coálgebra, entonces C^{op} es una coálgebra, con comultiplicación Δ^{op} definida por $\Delta^{op} := \tau\circ\Delta$. La categoría ${}^C\mathcal{M}$ se identifica con $\mathcal{M}^{C^{op}}$. Si C y D son dos k-coálgebras, entonces $C\otimes D$ es una k-coálgebra, la categoría de C-D-bicomódulos se identifica con la categoría de $C\otimes D^{op}$-comódulos. En particular, los espacios vectoriales que son simultaneamente C-comódulos a derecha y C-comódulos a izquierda con coacciones compatibles se identifican con los $C\otimes C^{op}$-comódulos; denotaremos en el futuro $C^e := C\otimes C^{op}$.

Como ejemplos básicos, si A es una k-álgebra de dimensión finita y N es un A-módulo a derecha, entonces $N^* = Hom_k(N,k)$ es un A^*-comódulo a izquierda tomando como morfismo de estructura al adjunto a la multiplicación $m : N\otimes A\to N$ junto a la identificación $A^*\otimes N^*\cong(N\otimes A)^*$.

Casi recíprocamente, si C es una k-coálgebra (sin importar si es o no de dimensión finita), entonces C^* siempre es un álgebra tomando como multiplicación a la composición de la flecha natural $C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$ con la adjunta de la comultiplicación $\Delta^* : (C \otimes C)^* \to C^*$. De la misma manera, si M es un C-comódulo (a izquierda) entonces M^* es un C^*-módulo (a derecha). Por otro lado, M mismo es un C^*-módulo a derecha, definiendo $m.\phi := \phi(m_{-1})m_0$ donde $\phi \in C^*$, $m \in M$ y $m_{-1} \otimes m_0 = \rho^-(m)$ (signo de sumatoria sobre-entendido). De cualquier manera, no todo C^*-módulo a derecha 'provienen' de C-comódulos a izquierda, por ejemplo todo C-comódulo es límite directo de subcomódulos de dimensión finita, y esta aseveración no tiene por que ser cierta para un C^*-módulo a derecha en general. Los C^*-módulos que son C-comódulos son los llamados *módulos racionales*.

Consideremos como coálgebra a $k[G]$ donde G es un grupo cualquiera. Si M es un k-espacio vectorial con una G-graduación (i.e. $M = \oplus_{g \in G} M_g$, suma directa como k-espacio vectorial) entonces M es un $k[G]$-comódulo definiendo $\Delta(m) = \sum_{g \in G} g \otimes m_g$ en donde $m = \sum_{g \in G} m_g$ es la escritura que da la descomposición de acuerdo a la G-graduación de M (notar que aunque G fuera eventualmente infinito, la suma anterior siempre es finita). Recíprocamente todo $k[G]$-comódulo es exactamente un k-espacio vectorial G-graduado pues si $m \in M$ entonces $\Delta(m)$ se escribirá de manera única como una suma de elementos de la forma $g \otimes m_g$, y esto da una graduación. Es sencillo verificar que las construcciones son recíprocas.

Si G es un grupo de Lie y X es una variedad suave provista de una acción suave de G, entonces $C^\infty(X)$ es un $C^\infty(G)$-comódulo identificando como siempre $C^\infty(G \times X) \cong C^\infty(G)\widehat{\otimes} C^\infty(X)$.

Si C es una coálgebra en la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo k, entonces la categoría ${}^C\mathcal{M}$ de C-comódulos es una categoría abeliana, más adelante le aplicaremos la construcción de Verdier y consideraremos su categoría derivada $\mathcal{D}({}^C\mathcal{M})$. Llamaremos $\mathcal{D}(C)$ a la categoría $\mathcal{D}({}^C\mathcal{M})$.

Antes de finalizar esta sección comentaremos algunas propiedades básicas del Hom en la categoría ${}^C\mathcal{M}$ pues serán propiedades e invariantes que se generalizarán a las categorías de homotopía y derivada.

Si C es una coálgebra en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes)$, M un C-comódulo y V un objeto cualquiera de $\mathcal{C}$, entonces $C \otimes V$ es un C-comódulo con morfismo de estructura $\rho^- = \Delta \otimes id$. Estos comódulos jugarán un rol especial, pues a partir de la siguiente propiedad con respecto al Com resultan C-inyectivos relativos a $\mathcal{C}$. Se tiene una biyección natural:

$$Com_C(M, C \otimes V) \cong Hom_{\mathcal{C}}(M, V)$$

Las aplicaciones son:

- dada $f : M \to C \otimes V$ morfismo de C-comódulos, se le asigna $(\epsilon \otimes id) \circ f : M \to k \otimes V = V$.

- dada $g : M \to V$ un morfismo cualquiera en $\mathcal{C}$, se le asigna $(id \otimes g)\rho_M^-$.

La verificación de que son aplicaciones inversas es idéntica al caso en que $(\mathcal{C}, \otimes) = (Vect_k, \otimes_k)$, sólo hace uso de los axiomas que definen la categoría ${}^C\mathcal{M}$ a partir de $\mathcal{C}$. Como consecuencia, si V es un objeto inyectivo en la categoría $\mathcal{C}$, entonce $C \otimes V$ es inyectivo en la categoría ${}^C\mathcal{M}$.

En el caso particular de coálgebras sobre un cuerpo k, tenemos que $Com_C(C, C) = Com_C(C, C \otimes k) = Hom_k(C, k) = C^*$, pero más aún, es claro que $Com_C(C, C)$ es un álgebra con la composición, por otro lado, si C es una k-coálgebra, C^* es una k-álgebra, y cabe preguntarse si el morfismo de adjunción es un morfismo de álgebras, y la respuesta es si, pues si $f, g : C \to C$ son morfismos de C-comódulos y $c \in C$, entonces

$$(\epsilon \circ f) * (\epsilon \circ g)(c) = \epsilon(f(c_1))\epsilon(g(c_2)) =$$

$$= \epsilon\left(f(c_1\epsilon g(c_2))\right) = \epsilon\left(f\left((id \otimes \epsilon)(c_1 \otimes g(c_2))\right)\right) =$$
$$= \epsilon\left(f\left((id \otimes \epsilon)\Delta(g(c))\right)\right) = \epsilon(f(g(c))) =$$
$$= \epsilon \circ (f \circ g)(c)$$

Si nos proponemos calcular $Com_{C^e}(C, C)$, es claro que $Com_{C^e}(C, C) \subseteq Com_C(C, C) \cong C^*$ y además es una subálgebra, de hecho, bajo la identificación $Com_C(C, C) \cong C^*$ resulta $Com_{C^e}(C, C) \cong \mathcal{Z}(C^*)$. Para esto consideremos $f : C \to k$ y veamos qué condiciones aseguran que el correspondiente morfismo de comódulos a izquierda $f' = (id \otimes f)\Delta : C \to C$ sea también morfismo de C-comódulos a derecha:

Si $f' = (id \otimes f)\Delta : C \to C$ es un morfismo de C-comódulos a derecha, entonces $(f' \otimes id)\Delta = \Delta f'$, en notacion de Sweedler, dado un $c \in C$ tenemos la igualdad

$$c_1 f(c_2) \otimes c_3 = c_1 \otimes c_2 f(c_3)$$

lo cual implica (aplicando ϵ a la izquierda) que

$$f(c_1)c_2 = c_1 f(c_2)$$

Si ahora $g : C \to k$ es un elemento cualquiera de C^*, aplicando g a la igualdad anterior tenemos que

$$g\left(f(c_1)c_2\right) = f(c_1)g(c_2) = g\left(c_1 f(c_2)\right) = g(c_1)f(c_2)$$

o sea que $f * g = g * f$, por lo tanto $f \in \mathcal{Z}(C^*)$. Ver recíprocamente que si $f : C \to C$ es un morfismo de C^e-comódulos entonces $\epsilon \circ f \in \mathcal{Z}(C^*)$ es también consecuencia de un cálculo inmediato, pues por la condición de colinearidad a derecha e izquierda de f tenemos que para cualquier $c \in C$ vale la igualdad

$$c_1 \otimes f(c_2) \otimes c_3 = f(c)_1 \otimes f(c)_2 \otimes f(c)_3$$

Aplicando ϵ en el medio, obtenemos la igualdad

$$c_1 \widehat{f}(c_2) \otimes c_3 = f(c)_1 \otimes f(c)_2$$

donde $\widehat{f} := \epsilon \circ f$. Vemos entonces que o bien aplicando ϵ a la derecha o bien aplicando ϵ a la izquierda, en ambos casos del lado derecho de la ecuación obtenemos $f(c)$, lo que implica que

$$\widehat{f}(c_1)c_2 = c_1\widehat{f}(c_2)$$

y esta condición hemos visto anteriormente que implica que $\widehat{f} \in \mathcal{Z}(C^*)$.

2. Los funtores $Hoch^*$ y H^*

Sea C una coálgebra en la categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo fijo k. En lo que sigue, escribiremos $\otimes$ por $\otimes_k$ y $Hom(-,-)$ por $Hom_k(-,-)$. En [Doi 81], Doi define dos teorías de cohomología asociadas a una coálgebra C y a un bicomódulo M por medio de complejos standard, estos complejos son los siguientes:

$$\mathcal{C}_{Hoch}(M,C) := \qquad M \xrightarrow{\quad b \quad} M \otimes C \xrightarrow{\quad b \quad} M \otimes C^{\otimes 2} \xrightarrow{\quad b \quad} \cdots$$

$$\mathcal{C}_H(M,C) := \qquad Hom(M,k) \xrightarrow{d} Hom(M,C) \xrightarrow{d} Hom(M,C^{\otimes 2}) \xrightarrow{d} \cdots$$

donde $b : M \otimes C^{\otimes n} \to M \otimes C^{\otimes n+1}$ está definida por

$$b(m \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes c_n) = \rho^+(m) \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes c_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i m \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes \Delta(c_i) \otimes \ldots \otimes c_n + (-1)^{n+1} t(\rho^-(m) \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes c_n)$$

En esta fórmula $t : C \otimes M \otimes C^{\otimes n+1} \to M \otimes C^{\otimes n+2}$ es el morfismo que coloca el primer factor del producto tensorial en el último lugar. El diferencial del segundo complejo está definido por

$$d : Hom(M, C^{\otimes n}) \to Hom(M, C^{\otimes n+1})$$

$$d(f)(m) = (f \otimes id)\rho^+(m) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Delta_i(f(m)) + (-1)^{n+1} t(id \otimes f)(\rho^-(m))$$

donde $\Delta_i(c_1 \otimes \ldots \otimes c_n) := c_1 \otimes \ldots \otimes \Delta(c_i) \otimes \ldots \otimes c_n$.

Por definición, $Hoch^*(M,C) = H^*(\mathcal{C}_{Hoch}(M,C))$ y $H^*(M,C) = H^*(\mathcal{C}_H(M,C))$. Notaremos también $Hoch^*(C) = Hoch^*(C,C)$ y $H^*(C) = H^*(C,C)$.

Ejemplo: $Hoch^0(M,C) = \{m \in M \ / \ \rho^+(m) = t\rho^-(m)\}$, es decir que $Hoch^0$ mide la cosimetría de M. En el caso $M = C$, $Hoch^0(C) = C$ si y sólo si C es coconmutativa. Notemos que en el caso de que C sea coconmutativa, tomando los complejos para $M = C$, tanto para $Hoch^*$ como para H^*, el primer diferencial es nulo, en ese caso $H^1(C) = \{f : C \to C \ / \ \Delta f = (f \otimes 1 + 1 \otimes f)\Delta\}$, es decir, las coderivaciones de C en C. En el caso general, la imagen del primer diferencial del complejo $\mathcal{C}_H(C,C)$ no tiene por que ser nulo, los elementos del $Hom(C,C)$ que están en la imagen de este diferencial son precisamente las coderivaciones que se llaman *interiores*, se tiene entonces siempre que $H^1(C) = Coder(C)/Inn(C)$.

En el mismo trabajo [Doi 81], Doi da una caracterización de estas dos teorías de cohomología en términos de funtores derivados, que es la siguiente:

$$Hoch^*(M,C) = Cotor^*_{C^e}(M,C)$$

$$H^*(M,C) = Ext^*_{C^e}(M,C)$$

donde $C^e = C \otimes C^{op}$ es la llamada *coálgebra envolvente* y se ha identificado la categoría de C-bicomódulos con la de C^e-comódulos. El bifuntor $Ext^*_{C^e}(-,-)$ no necesita mayor presentación, el funtor $Cotor^*_{C^e}(-,-)$ es por definición el funtor derivado del producto cotensorial $-\square_{C^e}-$. La razón por la que la mencionada caracterización en términos de funtores derivados es válida es que en la categoría de comódulos, existe una resolución standard que es la proveniente de la adjunción:

$$Com_C(M, C \otimes V) = Hom(M,V)$$

Esta adjunción da lugar, para cada C-comódulo M, a un complejo standard cuyo diferencial se denota b':

$$M \xrightarrow{b'=\rho^+} M \otimes C \xrightarrow{b'} M \otimes C^{\otimes 2} \xrightarrow{b'} \cdots$$

$$b'(m \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes c_n) := \rho^+(m) \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes c_n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i m \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes \Delta(c_i) \otimes \ldots \otimes c_n$$

Este complejo es exacto pues tiene como homotopía de contracción a $(-1)^n id \otimes \epsilon : M \otimes C^{\otimes n} \to M \otimes C^{\otimes n-1}$. Como en la categoría de espacios vectoriales todo objeto es inyectivo, se sigue que $C \otimes V$ es un objeto inyectivo en la categoría de C-comódulos, por lo tanto la resolución standard es una resolución inyectiva. Tomando esta resolución inyectiva en particular para calcular $Hoch^*$ o H^* se llega al complejo standard definido por Doi.

En el caso de trabajar con una coálgebra sobre un anillo que no es necesariamente un cuerpo, $Hoch^*$ no tiene porque ser un $Cotor$, y H^* no tiene porque ser un Ext, pues no todo módulo sobre el anillo de base tiene que ser inyectivo. Sin embargo, la resolución standard sigue siendo exacta, y los objetos son inyectivos relativos a los morfismos k-split, por lo tanto, en el caso general, $Hoch^*$ y H^* son funtores derivados relativos. En el caso topológico sucede el mismo tipo de fenómeno, si se toma como definición de $Hoch^*$ y de H^* la misma que la dada anteriormente, sustituyendo $\otimes$ por $\widehat{\otimes}_\pi$, entonces estos funtores son un $Cotor$ y un Ext relativos a los morfismos que sean (continuamente) split, sin embargo, para cierto tipo de espacios en [F-S 98b] demostramos que $Hoch^*$ y H^* son funtores homológicos con respecto a sucesiones exactas cortas topológicas que no sean necesariamente $\mathbb{C}$-split.

2.1. Invariancia Morita - Takeuchi

Una de las propiedades fundamentales de estas dos teorías de cohomología es la siguiente:

Teorema 2.1. *Sean C y D dos k-coálgebras tales que existen bicomódulos ${}_CP_D$ y ${}_DQ_C$ verificando $P\square_D Q \cong C$ y $Q\square_C P \cong D$ (isomorfismos de bicomódulos). Entonces, para todo C-bicomódulo M*

$$Hoch^*(M,C) \cong Hoch^*(Q\square_C M \square_C P, D)$$

$$H^*(M,C) \cong H^*(Q\Box_C M \Box_C P, D)$$

En particular $H^*(C) \cong H^*(D)$ *y* $Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$.

Observación: Es sabido, después de Takeuchi [Tak 77a] que dadas dos k-coálgebras C y D, toda equivalencia entre C-comódulos y D-comódulos esta dada por un par de bicomódulos como los del enunciado del teorema. La última frase del enunciado del teorema anterior puede re-escribirse de la siguiente manera: sean C y D dos k-coálgebras tales que ${}^C\mathcal{M} \cong {}^D\mathcal{M}$ como k-categorías, entonces $Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$ y $H^*(C) \cong H^*(D)$.

La primera demostración de este hecho ha sido dada en [F-S 98a], no la reproduciremos aquí , tan sólo la comentaremos. La demostración de la invariancia se basa en que las equivalencias de categorías son funtores exactos y preservan objetos inyectivos, por lo tanto, envían resoluciones inyectivas en resoluciones inyectivas. Partiendo de una resolución inyectiva de $C \to X_*$ como C^e-comódulo, aplicando el funtor $Q\Box_C - \Box_C P$ se obtiene una resolución de $D = Q\Box_C C \Box_C P \to Q\Box_C X_* \Box_C P$ como D^e-comódulo; utilizando esta resolución en particular se tiene

$$H^*(M,C) = Ext^*_{C^e}(M,C) = H^*(Hom_{C^e}(M,X_*)) \cong$$

$$\cong H^*(Hom_{D^e}(Q\Box_C M \Box_C P, Q\Box_C X_* \Box_C P)) = Ext^*_{D^e}(Q\Box_C M \Box_C P, D) =$$
$$= H^*(Q\Box_C M \Box_C P, D)$$

Para $Hoch^*$, los argumentos son similares. Notar que en la demostración que acabamos de realizar, lo único que utilizamos es que exista una equivalencia de categorías $F : C^e\text{-comod} \cong D^e\text{-comod}$ tal que $F(C) = D$, en ese caso, lo que se demuestra es que $H^*(M,C) \cong H^*(F(M),D)$. Ejemplos de coálgebras en las que se dan estos fenómenos son las llamadas coálgebras de Azumaya; en el mismo trabajo [F-S 98a] estudiamos también estas coálgebras desde el punto de vista cohomológico. Señalamos que como la demostración de la invariancia de $Hoch^*$ es sutilmente diferente, las hipótesis más débiles para demostrar la invariancia también son sutilmente diferentes. Remitimos al lector a [F-S 98a] para los detalles sobre este punto.

Observación: Si escribimos $H^*(C) = \oplus_{n\geq 0} Ext^n_{C^e}(C,C)$, vemos que con el producto de extensiones, H^* es un álgebra graduada. Si $F : C^e\text{-comod} \to D^e\text{-comod}$ es una equivalencia entonces induce isomorfismos $Ext^n_{C^e}(C,C) \to Ext^n_{D^e}F(C),F(C))$, y es claro que el isomorfismo inducido por F respeta la multiplicación de extensiones, luego el isomorfismo $Ext^*_{C^e}(C,C) \cong Ext^*_{D^e}(F(C),F(C))$ es multiplicativo. Como consecuencia obtenemos la siguiente afirmación: sean C y D dos k-coálgebras equivalentes Morita-Takeuchi, entonces se tiene un isomorfismo de álgebras graduadas $H^*(C) \cong H^*(D)$.

2.2. Ejemplos de cálculos

2.2.1. (co)Álgebras de dimensión finita

Sea C una k-coálgebra tal que $dim_k(C) < \infty$, llamemos A al álgebra C^*. En este caso, por ser A de dimensión finita, A^* se identifica con C, veremos entonces la relación entre $Hoch^*(C,C)$, $H^*(C,C)$, $H_*(A,A)$ y $H^*(A,A)$.

Proposición 2.2. *Si C es una k-coálgebra de dimensión finita y si $A = C^*$, entonces*

$$Hoch^*(C) = H_*(A,A)^*$$

$$H^*(C,C) = H^*(A,A)$$

donde la H del lado derecho de las igualdades denota la homología y cohomología de Hochschild de álgebras.

Demostración: Demostraremos los isomorfismos al nivel de los complejos standard. Como C, y por lo tanto $C^{\otimes n}$ son de dimensión finita para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la aplicación de $Hom(C, C^{\otimes n})$ en $Hom(A^{\otimes n}, A)$ dada por $f \mapsto f^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, habiendo identificado $(C^{\otimes n})^* \cong (C^*)^{\otimes n} = A^{\otimes n}$.

Llamemos como siempre:

$$\Delta_i : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n+1}$$

$$c_1 \otimes \ldots \otimes c_n \mapsto c_1 \otimes \ldots \otimes \Delta(c_i) \otimes \ldots \otimes c_n$$

$$m_i : A^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n}$$

$$a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \mapsto a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}$$

Dada $f : C \to C^{\otimes n}$, calculemos $(b(f^*))^*$ y veamos que es igual a $b_{Hoch}(f)$:

Como $(b(f^*))^* : (A^{\otimes n+1})^* \to A^*$, dado $c \in A^*$, $(b(f^*))^*(c) \in (A^{\otimes n+1})^*$, aplicamos entonces este elemento a un producto $a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}$.

$$(b(f^*))^*(c)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = c\left(b(f^*)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\right) =$$

$$= c\left(a_1.f^*(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\right) + c\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f^*(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\right) +$$

$$+c\left((-1)^{n+1} f^*(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) a_{n+1}\right) =$$

$$= c\left((m(id \otimes f^*) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f^* m_i + (-1)^{n+1} m(f^* \otimes id))(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\right)$$

evaluando, tenemos que la última expresión es igual a

$$c\left(((id \otimes f)\Delta + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Delta_i f + (-1)^{n+1} (f \otimes id)\Delta)^*(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\right) =$$

$$c\,(b_{Hoch}(f)^*(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})) =$$
$$= (b_{Hoch}(f)^*(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}))\,(c) =$$
$$= (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})\,(b_{Hoch}(f)(c)) =$$
$$= (b_{Hoch}(f)(c))\,(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$$

Como esto es cierto para cualquier elemento $(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1})$, entonces $b_{Hoch}(f)(c) = (b(f^*))^*(c)$ para todo c, luego $(b(f^*))^* = b_{Hoch}(f)$.

El caso de $Hoch^*(C,C)$ es más fácil, llamando

$$T : C^{\otimes n} \mapsto C^{\otimes n}$$
$$c_1 \otimes \ldots \otimes c_n \mapsto (-1)^n c_2 \otimes \ldots \otimes c_n \otimes c_1$$
$$t : A^{\otimes n} \mapsto A^{\otimes n}$$
$$a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \mapsto (-1)^n a_n \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$$

resulta claramente que $t = T^*$, $T = t^*$ y obviamente $m_i = \Delta_i^*$ y $\Delta_i = m_i^*$, luego $b_{Hoch}^* = b$ y $b^* = b_{Hoch}$, por lo tanto $Hoch^*(C,C) = H_*(A,A)^*$ y $H_*(A,A) = Hoch^*(C,C)^*$.

2.2.2. La coálgebra tensorial TV

Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, consideramos el espacio vectorial $TV = \oplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$, pero en vez de mirarlo como álgebra, lo dotamos de una estructura de coálgebra (graduada) a través de la comultiplicación

$$\Delta : TV \to TV \otimes TV$$
$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (v_1, \ldots, v_i) \otimes (v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

donde, por convención, $v_0 = v_{n+1} = 1$, $v_i \in V$, y $(v_1, \ldots, v_n) \in V^{\otimes n} \subset TV$. El cálculo de $Hoch^*(TV)$ y $H^*(TV)$ (donde no consideraremos la graduación de la coálgebra TV) se basa en la existencia de una resolución inyectiva pequeña para este caso en particular. Los resultados que aquí expondremos fueron publicados en [F-S 98a]

Lema 2.3. *(Lemma 2.8 de [F-S 98a]) El siguiente complejo es una resolución inyectiva de TV como TV-bicomódulo.*

$$0 \longrightarrow TV \xrightarrow{\Delta} TV \otimes TV \xrightarrow{d} TV \otimes V \otimes TV \longrightarrow 0$$

donde d está definida por:

$$d(1 \otimes 1) = 0$$
$$d(1 \otimes w_1 \ldots w_r) = 1 \otimes w_1 \otimes w_2 \ldots w_r$$
$$d(v_1 \ldots v_k \otimes 1) = -v_1 \ldots v_{k-1} \otimes v_k \otimes 1$$
$$d(v_1 \ldots v_k \otimes w_1 \ldots w_r) = v_1 \ldots v_k \otimes w_1 \otimes w_2 \ldots w_r - v_1 \ldots v_{k-1} \otimes v_k \otimes w_1 \ldots w_r$$

con $v_i, w_j \in V$, $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq r$.

La demostración completa se encuentra en [F-S 98a], aquí comentaremos los puntos principales.

Es claro que, salvo en lugar cero, los bicomódulos son T^e-inyectivos, a mano se demuestra que $d\Delta = 0$ y que d es morfismo de TV-bicomódulos. Para probar la exactitud, se define la homotopía de contracción:

$$h_0 = Id \otimes \epsilon : TV \otimes TV \to TV$$

$$h_1 : TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV$$

$$h_1(v_1 ... v_k \otimes x \otimes w_1 ... w_r) = \sum_{i=0}^{k} v_1 ... v_i \otimes v_{i+1} ... v_k x w_1 ... w_r$$

donde $v_i, x, w_j \in V$, $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq r$.

Como corolario, se tiene que para cualquier TV-bicomódulo M:

Corolario 2.4. *Dado un TV-bicomódulo M, para todo $n \geq 2$:*

$$H^n(M, TV) = Hoch^n(M, TV) = 0$$

Para el caso particular de $M = TV$:

Corolario 2.5. *Si $dim_k(V) \geq 2$ entonces*

$$H^0(TV, TV) = k$$

$$Hoch^0(TV, TV) = TV^{\sigma}$$

$$H^1(TV, TV) = Coder(TV)/Inn(TV)$$

$$Hoch^1(TV, TV) = TV_{\sigma}$$

donde $TV^{\sigma} = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n \sigma}$ y $V^{\otimes n \sigma}$ son los invariantes de $V^{\otimes n}$ bajo la acción de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ (el generador σ de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$ actúa en $V^{\otimes n}$ por la fórmula $\sigma(v_1 ... v_n) = v_n v_1 ... v_{n-1}$).

Observación: Si $dim_k(V) = 1$, elegimos un generador x, $V = k.x$ y $TV \cong k[x]$. Fórmulas análogas a las de TV valen pero ahora $\mathbb{Z}_n$ actúa trivialmente sobre $(kx)^{\otimes n}$, luego

$$H^0(k[x], k[x]) = k[x]^*$$

$$H^1(k[x], k[x]) = Hom_k(k[x], k.x) = k[x]^*.x$$

$$Hoch^0(k[x], k[x]) = k[x]$$

($k[x]$ es coconmutativa),

$$Hoch^1(k[x], k[x]) = k[x] \otimes k.x = \overline{k[x]}.$$

2.2.3. La coálgebra coconmutativa $sh(V)$

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con base $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Para cada i, $1 \leq i \leq r$, consideremos el espacio vectorial $k[x_i] = T(k.x_i) = \oplus_{n \geq 0} k.x_i^n$. La estructura de coálgebra está definida como en el ejemplo anterior:

$$\Delta(x_i^n) = \sum_{k=0}^{n} x_i^k \otimes x_i^{n-k}$$

Por definición, $sh(V) = sh(kx_1 \oplus \cdots \oplus k.x_r) = k[x_1] \otimes k[x_2] \otimes \ldots \otimes k[x_r]$.

El caso $r = 1$ es el único en que coincide con el ejemplo anterior, pues esta coálgebra es siempre coconmutativa, el cálculo de su cohomología es sencillo, después de haber demostrado la siguiente proposición:

Proposición 2.6. *Sean C y D dos k-coálgebras, entonces*

$$Hoch^*(C \otimes D) \cong Hoch^*(C) \otimes Hoch^*(D)$$

Demostración: Sea $C \to X_*$ una resolución C^e-inyectiva de C y sea $D \to Y_*$ una resolución D^e-inyectiva de D. Por la fórmula de Künneth, $C \otimes D \to X_* \otimes Y_*$ es una resolución, además, como en cada grado X_n (resp. Y_r) es un sumando directo de un C^e-comódulo del tipo $(C^e)^{(I)}$ (resp. de un D^e-comódulo del tipo $(D^e)^{(J)}$), entonces $X_n \otimes Y_r$ es un sumando directo de un comódulo del tipo $(C^e)^{(I)} \otimes (D^e)^{(J)} \cong ((C \otimes D)^e)^{(I \times J)}$, por lo tanto $(C \otimes D)^e$-inyectivo. Como $(X_* \otimes Y_*)_n = \oplus_{p+q=n} X_p \otimes Y_q$, entonces $(X_* \otimes Y_*)_n$ es un comódulo $(C \otimes D)^e$-inyectivo, y resulta así que $C \otimes D \to X_* \otimes Y_*$ es una resolución inyectiva. Tomando esta resolución inyectiva en particular, obtenemos que

$$Hoch^*(C \otimes D) = H^*((X_* \otimes Y_*) \square_{(C \otimes D)^e} C \otimes D) \cong H^*((X_* \square_{C^e} C) \otimes (Y_* \square_{D^e} D)) \cong$$

$$\cong H^*(X_* \square_{C^e} C) \otimes H^*(Y_* \square_{D^e} D) = Hoch^*(C) \otimes Hoch^*(D)$$

Por lo tanto, $Hoch^*(sh(V))$ es, en cada grado n, un $sh(V)$-comódulo isomorfo a $sh(V)^{\binom{n}{r}}$.

2.2.4. El dual restringido $k[x]^0$

Suponemos para este ejemplo $k = \overline{k}$, o sea, k un cuerpo algebraicamente cerrado, y suponemos también que tiene característica cero. Es sabido que otra manera de presentar el ejemplo precedente, es decir que $sh(V)$ es la componente irreducible que contiene a ϵ de $k[V]^0$, por lo tanto, no será sorprendente que para este ejemplo utilicemos los cálculos anteriores. Es bien sabido que $k[x]^0$ puede identificarse con la subálgebra de $k[|s|]$ de series formales generada por los polinomios y las funciones exponenciales. A su vez, esta subálgebra (que es un álgebra de Hopf, donde cada exponencial es un elemento group-like) es una suma directa $k[x]^0 = k[s, e^{\lambda s}]_{\lambda \in k} = \oplus_{\lambda \in k} k[s].e^{\lambda s}$. Utilizando el corolario 5.7 del teorema de escisión 5.5 de la sección 4, sabemos que si $C = \oplus_{i \in I} C_i$ es una suma directa de coálgebras, entonces $Hoch^*(C) = \oplus_{i \in I} Hoch^*(C_i)$, luego

$$Hoch^*(k[x])^0 = \oplus_{\lambda \in k} Hoch^*(k[s]).e^{\lambda s} = Hoch^*(k[s]) \otimes k[(k, +)].$$

2.3. Las distribuciones $\mathcal{D}(X)$, un ejemplo topológico

Aquí calcularemos la versión topológica de $Hoch^*$ para la coálgebra topológica $\mathcal{D}(X)$= distribuciones sobre una variedad diferenciable compacta X.

Si X es una variedad suave compacta, Connes [Co 85] prueba que existe una resolución de $C^\infty(C)$ como $C^\infty(X \times X) = C^\infty(X)\widetilde{\otimes} C^\infty(X)$-módulo formada por módulos E^i que son $C^\infty(X \times X)$-proyectivos de tipo finito, tales $E^i \otimes_{C^\infty(X\times X)} C^\infty(X) \cong \Omega^i(X)$, y el diferencial $d_{E^*} \otimes id$ es nulo. Más aún, la resolución que obtiene es $\mathbb{C}$-split.

Como la resolución es $\mathbb{C}$-split (con splitting continuo), entonces la sucesión $((E^*)', d')$ es también $\mathbb{C}$-split, y por lo tanto exacta (aquí el funtor $(-)'$ denota el dual continuo). Como los E^i son proyectivos de tipo finito, entonces son sumandos directos de $C^\infty(X \times X)^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego se sigue que $(E^i)'$ es un sumando directo de $\mathcal{D}(X \times X)^n$ y por lo tanto son $\mathcal{D}(X \times X) = \mathcal{D}(X)\widehat{ot}\mathcal{D}(X)^{op}$ inyectivos, y además

$$(E^i)' \square_{\mathcal{D}(X\times X)} \mathcal{D}(X) \cong (C^\infty(X) \otimes_{C^\infty(X\times X)} E^i)'$$

(la finita generación de E^i es esencial para la validez de este isomorfismo) y el diferencial es el traspuesto de $d \otimes id$, que era cero. Concluimos entonces que

$$Hoch^n(\mathcal{D}(X)) = HH_n(C^\infty(X))' = (\Omega^n(X))' =: \Omega^n_{\mathcal{D}(X)}$$

2.4. Localización

La localización de coálgebras es una construcción que fue llevada a cabo por Takeuchi en [Tak 77a] para coálgebras sobre un cuerpo con topología discreta y espacios vectoriales topológicos con topologías lineales. En [F-S 98b] hemos realizado las construcciones correspondientes para el caso de $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$ y topologías localmente convexas, con miras al ejemplo de la coálgebra $\mathcal{D}(X)$ de distribuciones sobre una variedad diferenciable real compacta X. El principal problema de la construcción de la localización es que nos posiciona en una categoría de espacios topológicos, aún cuando se haya comenzado con una coálgebra 'usual'.

Antes de dar la construcción de la coálgebra localizada, la pregunta básica es ¿con respecto a qué subconjuntos se localiza? En el caso de álgebras, dada un álgebra A, un subconjunto multiplicativo $S \subset \mathcal{Z}(A)$ puede verse o bien como un subconjunto de $\mathcal{Z}(A)$, o bien como un subconjunto de los morfismos $Hom_{A^e}(A, A)$, más aún, los elementos de S dan, para cada A-módulo M, un subconjunto de los endomorfismos de M. La localización, en el contexto de álgebras y módulos, es un funtor de la categoría de A-mod en la categoría de A_S-mod que transforma los elementos de S en isomorfismos de la categoría de A_S-mod, y además, este funtor es universal con respecto a todos los funtores A-mod$\to$ B-mod con esa propiedad.

Volviendo a las coálgebras, hemos visto en la sección 1 que los endomorfismos de una coálgebra C (vista C como C-comódulo a izquierda) están en correspondencia 1-1 con el álgebra dual

$$Com_C(C, C) \cong C^*$$

$$f \mapsto \epsilon \circ f$$

y bajo esta identificación, $Com_{C^e}(C, C) = \mathcal{Z}(C^*)$.

Luego, los subconjuntos multiplicativos de los endomorfismos de C se corresponden con los subconjuntos multiplicativos del álgebra $\mathcal{Z}(C^*)$, por lo que la respuesta a la pregunta anterior ahora es clara. Los subconjuntos multiplicativos asociados a una coálgebra C serán por definición los subconjuntos multiplicativos del álgebra $\mathcal{Z}(C^*) = Com_{C^e}(C, C)$.

Se busca ahora resolver el siguiente problema universal:

Dada C una coálgebra y $S \subset \mathcal{Z}(C^*)$ un subconjunto multiplicativo, buscamos una coálgebra $C_{[S]}$ y un morfismo de coálgebras $\pi : C_{[S]} \to C$ tal que $s \circ \pi \in C^*_{[S]}$ sea una unidad para todo elemento $s \in S$, y que además $\pi : C_{[S]} \to C$ sea universal con respecto a esa propiedad, es decir, que si $f : D \to C$ es un morfismo de coálgebras tal que $f^*(S) \subset (\mathcal{U}(\mathcal{Z}(D^*)))$ entonces existe $\widetilde{f} : D \to C_{[S]}$ tal que $f = \pi \circ \widetilde{f}$. En diagramas, esta propiedad se escribe como

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"'] & C \\ C_{[S]} \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Notar que esta propiedad universal es la dual de la propiedad universal de la localización de álgebras (con respecto a subconjuntos multiplicativos centrales). Antes de dar la construcción en general, veamos un ejemplo:

Ejemplo: Sea A una k-álgebra de dimensión finita, $S \subset \mathcal{Z}(A)$ un subconjunto multiplicativo y sea $C = A^*$. Identificando $A \cong A^{**}$ consideramos a $S \subset C^*$ y suponemos además que $dim_k(A_S) < \infty$. Entonces el problema anterior de la localización de coálgebras tiene solución, y es $C_{[S]} = (A_S)^*$, $\pi = j_S^* : C_{[S]} \to C$, donde $j_S : A \to A_S$ es el morfismo canónico para la localización.

Demostración: Ante todo, veamos que $s\pi \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}(C_{[S]}^*))\ \forall s \in S$:

Sea $s \in S$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_S"] \arrow[d] & A_S \arrow[d] \\
A^{**} \arrow[r, "j_S^{**}"] & (A_S)^{**}
\end{tikzcd}$$

Las dos flechas verticales son isomorfismos, y es claro que $j_S(S) \subset \mathcal{U}(\mathcal{Z}(A_S))$, por lo tanto $j_S^{**}(S) \subset \mathcal{U}(\mathcal{Z}((A_S)^{**}))$, o sea que $s\pi = sj_S^* = j_S^{**}(s) \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}(A_S^{**})) = \mathcal{U}(\mathcal{Z}(C_{[S]}^*))$ como se quería demostrar. Veamos además que $\pi : C_{[S]} \to C$ es universal con respecto a esa propiedad. Sea $f : D \to C$ un morfismo de coálgebras tal que $sf \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}(D^*))\forall s \in S$ y consideremos el diagrama de las álgebras duales

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_S"] \arrow[d, "f^*"] & A_S \arrow[dl, dashed, "\widehat{f}"] \\
D^* &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de $j_S : A \to A_S$, existe $\widehat{f} : A_S \to D^*$ tal que $\widehat{f} j_S = f^*$, luego $f^{**} = (\widehat{f} j_S)^* = j_S^* \widehat{f}^*$ y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C_{[S]} \arrow[r, "\pi"] & C \\
D^{**} \arrow[u, "\widehat{f}^*"] \arrow[ur, "f^{**}"] & D \arrow[l] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Se define entonces $\widetilde{f} := \widehat{f}^* i_D$ donde $i_D : D \to D^{**}$ es la inclusión de D en su doble dual; es claro que definido de esta manera, $f = \pi\widetilde{f}$. Faltaría ver que $\widetilde{f}$ es un morfismo de coálgebras, pero esto es sencillo pues $\widehat{f}$ es un morfismo de álgebras, luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "i_D"] \arrow[d, "\Delta_D"'] & D^{**} \arrow[r, "\widehat{f}^*"] \arrow[d, "m^*"] & C_{[S]} \arrow[d, "\Delta_{C_{[S]}} = (m_{A_S})^*"] \\
D \otimes D \arrow[r] & (D^* \otimes D^*)^* \arrow[r, "(\widehat{f} \otimes \widehat{f})^*"] & C_{[S]} \otimes C_{[S]}
\end{tikzcd}$$

donde $m : D^* \otimes D^* \to D^*$ es la multiplicación de D^*, definida como la composición de la inclusión natural $D^* \otimes D^* \subset (D \otimes D)^*$ y la traspuesta de la comultiplicación $\Delta_D^* : (D \otimes D)^* \to D^*$. En el diagrama anterior, el cuadrado de la izquierda es siempre conmutativo (la flecha horizontal inferior es la composición de las dos inclusiones canónicas $D \otimes D \subset D^{**} \otimes D^{**} \subset (D^* \otimes D^*)^*$), y el cuadrado de la derecha es conmutativo pues es el dual del diagrama que dice que $\widehat{f}$ es un morfismo de álgebras.

Como hemos visto en este ejemplo, dado que la propiedad universal de $C_{[S]} \to C$ es dual a la propiedad universal de la localización de álgebras, en el caso en que es posible dualizar resulta $C_{[S]} = (C^*)_S^*$. Describiremos entonces la construcción de A_S de manera tal que permita ser dualizada; de este modo se llega a la construcción de Takeuchi.

Proposición 2.7. *Sea A una k-álgebra y S un subconjunto no vacío multiplicativamente cerrado de $\mathcal{Z}(A)$. Entonces:*

- *Dotando a S del orden dado por la divisibilidad, S es un conjunto parcialmente ordenado, por lo tanto S define un sistema inductivo $s : A\frac{1}{s'} \to A\frac{1}{ss'}$ ($A\frac{1}{p}$ es un A-módulo libre de rango uno con base $\frac{1}{p}$, $s : A\frac{1}{ss'} \to A\frac{1}{s'}$ está definido por $\frac{1}{s'} \mapsto \frac{s}{ss'}$).*
- $\varinjlim_{S} A\frac{1}{s} \cong A_S$.

Demostración: Antes que nada, notemos que $\varinjlim_{S} A\frac{1}{s}$ es un álgebra pues se tienen morfismos

$$A\frac{1}{s} \otimes A\frac{1}{s'} \to A\frac{1}{ss'}$$
$$a\frac{1}{s} \otimes a'\frac{1}{s'} \mapsto a.a'\frac{1}{s.s'}$$

Tomando límite sobre el sistema $\{s.s'\}_{s,s' \in S}$ y usando que $\otimes$ conmuta con límites inductivos, se tiene un morfismo $\varinjlim_{S} A\frac{1}{s} \otimes \varinjlim_{S} A\frac{1}{s'} \to \varinjlim_{S.S'} A\frac{1}{s.s'} = \varinjlim_{S} A\frac{1}{s}$. Esta multiplicación es claramente asociativa y el uno es la imagen de $1\frac{1}{1}$.

Definiremos morfismos naturales entre el límite y el localizado y luego veremos que las respectivas composiciones son las respectivas identidades.

Por cada $s \in S$ se tiene el morfismo canónico

$$A\frac{1}{s} \to A_S$$

$$a.\frac{1}{s} \mapsto \frac{a}{s}$$

que claramente es compatible con el sistema inductivo, luego define un morfismo $\varinjlim_{S} A\frac{1}{s} \to A_S$. A su vez, se tiene un morfismo $A = A\frac{1}{1} \to \varinjlim_{S} A\frac{1}{s}$. Veamos que, por este morfismo, los elementos de S son enviados en unidades:

Sea x la imagen de $1.\frac{1}{s_0}$ en $\varinjlim_{S} A\frac{1}{s}$, entonces, dada la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
A = A\frac{1}{1} \arrow[r, "s_0"] \arrow[dr] & A\frac{1}{s_0} \arrow[d] \\
 & \varinjlim_{S} A\frac{1}{s}
\end{tikzcd}$$

la multiplicación de x por la imagen de s_0, es la imagen del 1 de A, luego la imagen de s_0, es una unidad como se quería ver. Entonces, por la propiedad universal de A_S se tiene un morfismo $A_S \to \varinjlim_{S} A\frac{1}{s}$.

La composición $A \to A_S \to \varinjlim_{S} A\frac{1}{s} \to A_S$, por definición, se factoriza por $A\frac{1}{1}$, y resulta igual al morfismo canónico $A \to A_S$, por lo tanto la composición $A_S \to \varinjlim_{S} A\frac{1}{s} \to A_S$ es la identidad. Para la composición $\varinjlim_{S} A\frac{1}{s} \to A_S \to \varinjlim_{S} A\frac{1}{s}$ veamos a dónde va a parar la imagen de un elemento $a\frac{1}{s_0} \in A\frac{1}{s_0}$. En primer lugar, es claro que esta imagen es el producto de las imágenes de $a\frac{1}{1}$ y de $1\frac{1}{s_0}$. El primer elemento, al estar en la imagen de $A\frac{1}{1}$ va a parar al elemento $\frac{a}{1}$ que a su vez va a parar a la imagen de $a\frac{1}{1}$. El segundo elemento, es el inverso de la imagen de $s_0\frac{1}{1}$, por lo tanto su imagen es $\frac{1}{s_0}$, y éste a su vez, por cómo están definidos los morfismos con dominio A_S, es enviado al inverso de la imagen de $s_0\frac{1}{1}$, o sea, al elemento original.

Sea ahora C una coálgebra y $S \subset \mathcal{Z}(C^*)$ un conjunto multiplicativo no vacío. Por cada $s \in S$ se toma $C^{(s)} = C$ como comódulo y se define el sistema proyectivo

$$\{s : C^{(s')} \to C^{(ss')}\}_{s,s' \in S}$$

donde el morfismo s es la multiplicación por s, es decir, $c \mapsto s(c_1)c_2 = (s \otimes id)(\Delta(c)$.

Definición 2.8. *Llamaremos el* **localizado de C con respecto a** *S, al límite $\varprojlim_{S} C^{(s)}$, y lo denotaremos $C_{[S]}$; definimos el morfismo canónico como $\pi : C_{[S]} \to C^{(1)} = C$.*

Si bien antes teníamos un morfismo multiplicación bien definido en los límites inductivos de álgebras porque los límites inductivos conmutan con el producto tensorial algebraico, aquí se plantea el problema de que los límites inversos no conmutan en general con el producto tensorial. Este problema fue resuelto por Takeuchi 'ampliando' al producto tensorial algebraico de la siguiente manera:

Consideremos V y W dos k-espacios vectoriales y supongamos que V y W tienen una topología tal que el cero admite una base de entornos formada por subespacios, llamemos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ a dos de estas bases de entornos. Entonces se define la siguiente familia de subespacios de $V \otimes W$: $\{V \otimes W_\beta + V_\alpha \otimes W\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$. Esta familia de subespacios define una topología lineal en $V \otimes W$, Takeuchi llama $V \widehat{\otimes} W$ al espacio vectorial topológico completado de $V \otimes W$ con respecto a la topología anterior. Dentro de las propiedades de este bifuntor definido en la categoría de k-espacios vectoriales topológicos lineales (donde a una topología se la llama lineal en caso de que admita una base de entornos del cero formada por subespacios) tiene las propiedades de asociatividad y conmutatividad del producto tensorial habitual, se tiene también que $k\widehat{\otimes}V \cong V\widehat{\otimes}k \cong \widehat{V}$, y además Takeuchi demuestra que $\widehat{\otimes}$ conmuta con productos y subespacios cerrados, luego conmuta con límites inversos de objetos completos, por lo tanto, para una coálgebra completa C (i.e. $C \cong \widehat{C}$), $C_{[S]}$ es una coálgebra topológica, o sea, el límite de los morfismos de comultiplicación de C dan un morfismo $\Delta_{C_{[S]}} : C_{[S]} \to C_{[S]}\widehat{\otimes}C_{[S]}$ que es coasociativo y counitario. Para el caso de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-espacios vectoriales localmente convexos pueden recuperarse los resultados análogos a los de Takeuchi utilizando la completación con respecto a la topología proyectiva del producto tensorial algebraico. Las mencionadas propiedades han sido demostradas en [F-S 98b].

Ejemplos:

1. Sea A un k-álgebra y sea $C = A^*$, consideramos a C como una coálgebra topológica con la topología inducida de la topología producto $C = A^* = Hom(A, k) \subset k^A$. Sea S un subconjunto multiplicativo de $\mathcal{Z}(A)$, e identificamos a $S \subset A$ con su imagen en $A^{**} = C^*$. Entonces $C_{[S]} = \lim\limits_{\leftarrow S} C^{(s)} = \lim\limits_{\leftarrow S}(A\frac{1}{s})^* = \left(\lim\limits_{\rightarrow S} A\frac{1}{s}\right)^* = (A_S)^*$.

2. Sea X una variedad diferenciable y $U \subset X$ un abierto tal que existe una función diferenciable $f : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $X - U = f^{-1}(0)$. Consideramos la coálgebra topológica (coconmutativa) $C = \mathcal{D}(X) = (C^\infty(X))'$, y $S_U = \{g : X \to \mathbb{C} \;/ g(u) \neq 0 \;\forall u \in U\} \subset C^\infty(X) = \mathcal{D}(X)'$ (donde $(-)'$ denota el dual continuo). Entonces $\mathcal{D}(X)_{[S_U]} = \lim\limits_{\leftarrow S_U} \mathcal{D}(X)^{(g)} = \lim\limits_{\leftarrow S_U}(C^\infty(X)\frac{1}{g})' = \left(\lim\limits_{\rightarrow S_U} C^\infty(X)\frac{1}{g}\right)' = (C^\infty(X)_{S_U})' = (C^\infty(U))' = \mathcal{D}(U)$, las distribuciones sobre X que tienen soporte incluído en U.

3. Sea C una coálgebra (en el sentido usual) tal que $C = C_1 \oplus C_2$, donde C_1 y C_2 son subcoálgebras de C ; las proyecciones $C \to C_i$, $i = 1, 2$ son morfismos comultiplicativos pero no counitarios, las inclusiones $C_i \to C$, $i = 1, 2$ son morfismos de coálgebras. En este caso $C^* = C_1^* \times C_2^*$; sea $S = \{1\} \times \mathcal{Z}(C_2^*)$, veamos entonces que la inclusión $C_1 \to C$ se identifica con el morfismo canónico $\pi : C_{[S]} \to C$. En particular, éste es un caso en que la localización de una coálgebra 'algebraica' da como resultado otra coálgebra 'algebraica'.

   Para ver que $i : C_1 \to C$ tiene la propiedad universal de la localización, veamos primero que $i^*(S) \subset \mathcal{U}(\mathcal{Z}(C_1^*))$. Pero ésto es claro, porque si $s \in S$, entonces $s = (\epsilon_{C_1}, \phi)$ para alguna $\phi \in C_2^* = C_1^\perp$, si $c \in C_1$ entonces $\Delta(c) \in C_1 \otimes C_1$ y $s.c = s(c_{(1)})c_{(2)} = \epsilon_{C_1}(c_{(1)})c_{(2)} + \phi(c_{(1)})c_{(2)} = c + 0$, pues $c_{(1)} \in C_1$ y $\phi|_{C_1} = 0$, luego $s.c = c \;\forall c \in C_1,\; s \in S$, es decir, $i^*(S) = 1_{C_1^*} \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}(C_1^*))$.

   Sea ahora $f : D \to C$ un morfismo de coálgebras tal que $f^*(S) \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}(D^*))$, en particular, $(1, 0) \in S$, por lo tanto $(1, 0) \circ f \in \mathcal{U}(\mathcal{Z}(D^*))$, sea $u \in D^*$ el inverso. Antes que nada, notemos que la multiplicación por el elemento $(1,0)$ es la proyección sobre C_1, pues si $c \in C_1$, $\Delta(c) \in C_1 \otimes C_1$ y $(1,0)(c) = (\epsilon_{C_1} \otimes id)\Delta(c) = c$, en cambio, si $c \in C_2$, entonces $\Delta(c) \in C_2 \otimes C_2$ y $(\epsilon_{C_1} \otimes id)\Delta(c) = 0$. Calculemos $f(d)$ para un elemento $d \in D$ cualquiera. Como $(1,0)f * u = 1$, $f(d) = f(((1,0)f * u).d) = f((1,0)f.(u.d))$, luego, cambiando d por $u.d$, basta calcular en dónde cae $f((1,0)f.d)$ para un d cualquiera. Ahora bien, $f((1,0)f.d) = f((1,0)(f(d_1))d_2) = (1,0)(f(d_1))f(d_2) = (1,0).f(d)$ (f es morfismo de coálgebras), y esto es la proyección de $f(d)$ sobre el factor C_1, luego la imagen de f está contenida en C_1, por lo tanto la flecha $f : D \to C$ obviamente se factoriza por la inclusión $C_1 \to C$ como queríamos ver. Como observación, la misma demostración se hubiera podido hacer reemplazando S por $\mathcal{U}(\mathcal{Z}(C_1^*)) \times \{1\}$.

Al igual que en el caso de álgebras, el morfismo canónico $\pi : C_{[S]} \to C$ no tiene por qué ser en general ni inyectivo ni sobreyectivo, sin embargo, para una coálgebra coconmutativa se tiene el siguiente resultado demostrado en [F-S 98b]: Si C es una coálgebra coconmutativa completa, entonces la aplicación

$$\oplus\pi_{\mathcal{M}} : \bigoplus_{\mathcal{M} \text{ max}} C_{[C'-\mathcal{M}]} \to C$$

donde $\mathcal{M}$ recorre todos los ideales maximales de C' tiene imagen densa. Este resultado es el enunciado dual del hecho de que en toda álgebra conmutativa A, un elemento $a \in A$ es distinto de cero si y sólo si para todo ideal maximal $\mathcal{M}$ de A es distinto de cero $\frac{a}{1} \in A_{\mathcal{M}}$, y por lo tanto el morfismo $A \to \prod_{\mathcal{M}} A_{\mathcal{M}}$ es una aplicación inyectiva.

Antes de ir de lleno al problema de la localización y su relación con $Hoch^*$, consideraremos la situación siguiente:

Dado un morfismo de coálgebras $f : C \to D$ (es decir que f satisface las igualdades $\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta_C$ y $\epsilon_D f = \epsilon_C$) y un C-bicomódulo M, componiendo con f se tienen aplicaciones que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho^-"] \arrow[d, "\rho^+"'] & C \otimes M \arrow[r, "f\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\rho^+"] & D \otimes M \arrow[d, "id\otimes\rho^+"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho^-\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes f"'] & C \otimes M \otimes C \arrow[dr, "f\otimes id\otimes f"] & D \otimes M \otimes C \arrow[d, "id\otimes id\otimes f"] \\
M \otimes D \arrow[r, "\rho^-\otimes id"] & C \otimes M \otimes D \arrow[r, "f\otimes id\otimes id"] & D \otimes M \otimes D
\end{tikzcd}$$

Lo cual muestra que, a través de f, todo C-bicomódulo M puede considerarse como un D-bicomódulo. Se tiene así un funtor inducido por f, que llamaremos ${}_f(-)$ (respectivamente $(-)_f$ o ${}_f(-)_f$) entre las categorías de C-comódulos a izquierda (respectivamente C-comódulos a derecha, o C-bicomódulos) y de D-comódulos a izquierda (respectivamente D-comódulos a derecha, o D-bicomódulos) que es la identidad sobre los objetos y es una inclusión en el Hom. A su vez existen funtores en la otra dirección, utilizando el producto cotensorial:

$$C_f \square_D - : {}^D\mathcal{M} \to {}^C\mathcal{M}$$

$$-\square_{Df}C : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$$
$$C_f\square_D - \square_{Df}C : {}^D\mathcal{M}^D \to {}^C\mathcal{M}^C$$

La pregunta natural es qué relacion hay entre los funtores definidos de esta manera y las teorías de cohomología. Ante todo hay una proposición sencilla:

Proposición 2.9. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, entonces existe una transformación natural*
$$Hoch^*(C_f\square_D - \square_{Df}C, C) \to Hoch^*(-, D)$$

Demostración: En primer lugar, existe una transformación natural entre el funtor $C_f\square_D - \square_{Df}C$ y el funtor identidad, dada por

$$\eta_M : C_f\square_D M\square_{Df}C \to D\square_D M\square_D D \cong M$$

$$c \otimes m \otimes c' \mapsto f(c) \otimes m \otimes f(c') \mapsto \epsilon(c)\epsilon(c')m$$

Se define ahora el siguiente morfismo entre los complejos standard:

$$f^n_M := \eta_M \otimes f^{\otimes n} : C_f\square_D M\square_{Df}C \otimes C^{\otimes n} \to M \otimes D^{\otimes n}$$

Es claro que este morfismo es natural en M, ver que es un morfismo de complejos es una verificación inmediata.

Una de las propiedades 'homológicas' del producto cotensorial $C_f\square_D-$ es que, además de ser exacto a izquierda, envía objetos inyectivos en objetos inyectivos. Demostremos esto:

Sea I un conjunto de índices arbitrario, entonces

$$(C_f\square_D-)(D^{(I)}) = C_f\square_D(D^{(I)}) = (C_f\square_D D)^{(I)} = C^{(I)}$$

A partir de este hecho, como todo D- comódulo inyectivo X es un sumando directo de $D^{(I)}$ para un conjunto I adecuado (por ejemplo X es sumando directo de $D \otimes X$), luego $C_f\square_D X$ es un sumando directo de $C^{(I)}$, y en consecuencia $C_f\square_D X$ es C-inyectivo. Si deseamos además que el funtor $C_f\square_D(-)$ respete resoluciones inyectivas debemos pedir la propiedad adicional de exactitud:

Definición 2.10. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras, f se dirá* **coplayo** *en caso de que el funtor $C_f\square_D(-)$ sea exacto.*

Demostraremos una primer versión del teorema de localización, si bien en [F-S 98b] hay una versión mas general cuando el morfismo es un morfismo de localización, comentamos esta demostración pues aquí aparecen todos los ingredientes fundamentales que se usarán en el otro teorema.

Teorema 2.11. *Sea $f : C \to D$ un morfismo coplayo entre dos coálgebras coconmutativas, M un D-bicomódulo (notar que al ser las coálgebras coconmutativas, b_{Hoch} es un morfismo C^e-colineal y D^e-colineal respectivamente). Supongamos que además $C_f\square_{Df}C \cong C$ como C-bicomódulo, entonces $Hoch^*(M,D)$ es un D-bicomódulo y*

$$C_f\square_D\left(Hoch^*(M,D)\right)\square_{Df}C \cong Hoch^*(C_f\square_D M\square_{Df}C, C)$$

Demostración: vamos a comparar los funtores siguientes:

$$F := C_f\square_D Hoch^*(-,D)\square_{Df}C$$

$$G := Hoch^*(C_f\square_D - \square_{Df}C, C)$$

Ambos son la composición de un funtor homológico con uno exacto (coplayitud de f!), por lo tanto, ambos son funtores homológicos. Sabemos que hay una transformación natural de uno en el otro, para ver que sea un isomorfismo basta ver $Hoch^*(-,C)$ se anula sobre la imagen por $C_f\square_D - \square_{Df}C$ de los D^e-comódulos inyectivos y ver que coinciden en grado cero.

Así como antes probamos que el funtor $C_f\square_D-$ enviaba D-inyectivos en C-inyectivos puede verse que $C_f\square_D - \square_{Df}C$ envía D^e-inyectivos en C^e-inyectivos (por ejemplo considerando $\widehat{f} = f\otimes f : C^e \to D^e$ e identificando $C_f\square_D - \square_{Df}C$ con $C^e_{\widehat{f}}\square_{D^e}-$). Veamos entonces qué sucede en grado cero:

$$C_f\square_D(Hoch^0(M,D))\square_{Df}C = C_f\square_D(M\square_{D^e}D)\square_{Df}C$$

Identificamos a $M\square_{D^e}D = \{m\in M\ /m_{-1}\otimes m_0 = m_1\otimes m_0\}\subset M$, $(C_f\square_D M\square_{Df}C)\square_{C^e}C = \{c\otimes m\otimes c' \in C_f\square_D M\square_{Df}C\ /\ c_1\otimes c_2\otimes m\otimes c' = c'_2\otimes c\otimes m\otimes c'_1\} \subseteq C_f\square_D M\square_{Df}C$. Se quiere demostrar que $(C_f\square_D M\square_{Df}C)\square_{C^e}C$ es isomorfo a $(C_f\square_D(M\square_{D^e}D)\square_{Df}C)$, para esto, veremos el siguiente isomorfismo

$$(\dagger)\qquad C_f\square_D(M\square_{D^e}D)\square_{Df}C \cong (C_f\square_D M\square_{Df}C)\square_{C^e}(C_f\square_{Df}C)$$

Viendo a $C_f\square_D(M\square_{D^e}D)\square_{Df}C \subset C\otimes M\otimes C$ y a $(C_f\square_D M\square_{Df}C)\square_{C^e}(C_f\square_{Df}C) \subset (C\otimes M\otimes C)\otimes(C\otimes C)$, los morfismos están definidos por

$$c\otimes m\otimes c' \longmapsto c_1\otimes m\otimes c'_1\otimes c'_2\otimes c_2$$

$$c\epsilon(c''')\otimes m\otimes c'\epsilon(c'') \longleftarrow c\otimes m\otimes c'\otimes c''\otimes c'''$$

Luego la igualdad $(C_f\square_D M\square_{Df}C)\square_{C^e}C \cong C_f\square_D(M\square_{D^e}D)\square_{Df}C$ se sigue entonces de la igualdad anterior más la hipótesis $C_f\square_{Df}C \cong C$.

Es claro que $c\otimes m\otimes c' = c_1\epsilon(c_2)\otimes m\otimes c'_1\epsilon(c'_2)$, por lo tanto una de las composiciones es la identidad. Para ver que $c\otimes m\otimes c'\otimes c''\otimes c''' = c_1\epsilon(c''')\otimes m\otimes c'_1\epsilon(c'')\otimes c'_2\otimes c_2$, utilizamos el hecho de que $c\otimes m\otimes c'\otimes c''\otimes c''' \in (C_f\square_D M\square_{Df}C)\square_{C^e}(C_f\square_{Df}C)$, por lo tanto

$$c_1\otimes(c_2\otimes m\otimes c')\otimes(c''\otimes c''') = c'''_2\otimes(c\otimes m\otimes c')\otimes(c''\otimes c'''_1)$$

y
$$(c \otimes m \otimes c'_1) \otimes c'_2 \otimes (c'' \otimes c''') = (c \otimes m \otimes c') \otimes c''_1 \otimes (c''_2 \otimes c'''_1)$$
Si aplicamos ϵ a los dos últimos factores de la igualdad
$$c_1 \otimes (c_2 \otimes m \otimes c'_1) \otimes c'_2 \otimes (c'' \otimes c''') = c'''_2 \otimes (c \otimes m \otimes c') \otimes c''_1 \otimes (c''_2 \otimes c'''_1)$$
se obtiene justamente
$$c_1 \otimes c_2 \otimes m \otimes c'_1 \otimes c'_2 \epsilon(c'')\epsilon(c''') = c'''_2 \otimes c \otimes m \otimes c' \otimes c''_1 \epsilon(c''_2)\epsilon(c'''_1) = c''' \otimes c \otimes m \otimes c' \otimes c''$$
que, luego de una permutación de factores y la coconmutatividad, es lo que queríamos ver.

Faltaría ver la buena definición, pero las verificaciones son inmediatas, las omitimos.

Observaciones: 1. La condición $C_f\square_{Df}C \cong C$ se verifica siempre cuando $C = D_{[S]}$, por otro lado, es sencillo encontrar contraejemplos al teorema cuando la condición anterior no se verifica, por lo tanto, es necesaria (por ejemplo tomar $f = \epsilon : C \to k$ donde C es una coálgebra coconmutativa que no es k, el funtor $C_f\square_k(-) = C \otimes (-)$ es exacto, y para $M = k$, $C \otimes (k\square_{k^e}k) \otimes C = C \otimes C \neq C = (C \otimes k \otimes C)\square_{C^e}C$).
2. Comparar la condición $C_f\square_{Df}C \cong C$ con el Teorema 7.26.

3. Extensiones y coderivaciones

3.1. Extensiones y H^2

Dadas k-coálgebras C y E, y $f : C \to E$ un morfismo de coálgebras inyectivo, diremos que E es una extensión de coálgebras de C. Identificando a C con la imagen de f, podemos suponer sin pérdida de generalidad cuando hablamos de una extensión de C que nos estamos refiriendo a una coálgebra E que contenga a C como subcoálgebra.

Si C es una coálgebra y E es una coálgebra que contiene a C, entonces C puede considerarse como E-bicomódulo (sub-bicomódulo de E) y por lo tanto E/C es un E-bicomódulo. Si $\pi : E \to E/C$ denota la proyección natural al cociente, la estructura de E/C está definida por

$$\rho^-(\pi(e)) = e_1 \otimes \pi(e_2) = (id \otimes \pi)\Delta(e)$$

$$\rho^+(\pi(e)) = \pi(e_1) \otimes e_2 = (\pi \otimes id)\Delta(e)$$

Uno puede preguntarse cuál es la condición que asegure que E/C sea un C-bicomódulo, es decir, que $Im(\rho^-) \subset C \otimes E/C$ y $Im(\rho^+) \subset E/C \otimes C$. La respuesta es sencilla, vemos que la condición $Im(\rho^-) \subset C \otimes E/C$ equivale a que $(\pi \otimes id)\rho^-(\pi(e)) = 0 \; \forall e \in E$, mientras que la condición $Im(\rho^+) \subset C \otimes E/C$ es equivalente a la condición $(id \otimes \pi)\rho^+(\pi(e)) = 0 \; \forall e \in E$, y vemos que ambas condiciones equivalen a la condición $(\pi \otimes \pi)\Delta(e) = 0 \forall e \in E$. Esta condición es más familiar, es prácticamente la definición de $C \wedge_E C$ (ver [Sw 69]); tenemos entonces que E/C es un C-bicomódulo si y sólo si $C \wedge_E C = E$.

Si consideramos $B = E^*$, $A = C^*$, $I = Ker(i^* : B \to A)$, entonces I se identifica con $(E/C)^* = C^\perp$, la condición de que E/C sea un C-bicomódulo corresponde al hecho de que I admita una estructura de A-bimódulo que provenga de levantar los elementos de A via $p = i^*$, y finalmente $(C \wedge C)^\perp = I^2$. Es sabido que si B es una k-álgebra, $I \subset B$ es un ideal de cuadrado cero y llamamos $A = B/I$ al álgebra cociente, entonces I es un A-bimódulo, y las extensiones de A "de cuadrado cero" juegan un papel importante en el estudio del álgebra A.

Como es de esperar, las extensiones de C en las que $E/C := M$ es un C-bicomódulo están parametrizadas por un grupo de cohomología, Y. Doi [Doi 81] estableció el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Sea C una k-coálgebra y M un C-bicomódulo, entonces las clases de extensiones*

$$0 \to C \to E \to M \to 0$$

donde E es una coálgebra que contiene a C que verifica $E = C \wedge_E C$ y el morfismo de E en M es E-bicolineal están en correspondencia con $H^2(M, C)$. Más aún, dada una extensión

$$0 \to C \to E \to M \to 0$$

su clase en $H^2(M, C)$ es cero si y sólo si existe un morfismo de coálgebras $\phi : E \to C$ tal que $\phi|_C = id_C$.

En lo que sigue, estaremos interesados en la relación entre las propiedades cohomológicas y propiedades estructurales de las coálgebras coconmutativas, nos detendremos entonces en las coálgebras coconmutativas.

3.2. Extensiones coconmutativas y H^2_{Har}

Sea C una coálgebra coconmutativa, diremos que

$$0 \to C \to E \to M \to 0$$

es una extensión coconmutativa de C si es una extensión (o sea que M es un C-bicomódulo) y además E es coconmutativa. Como consecuencia de la definición tenemos que M resulta un C-bicomódulo cosimétrico.

Proposición 3.2. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa, $\frac{1}{2} \in k$ y M un C-bicomódulo cosimétrico. Sea $H^2_{Har}(M, C) = \{[f] \in H^2(M, C) : \ / \ [f] = [\sigma f]\}$ donde $\sigma : C^{\otimes 2} \to C^{\otimes 2}$ está definido por $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$. Entonces $H^2_{Har}(M, C)$ es un k-sumando directo de $H^2(M, C)$, y está en correspondencia con las extensiones coconmutativas*

$$0 \to C \to E \to M \to 0$$

Demostración: En primer lugar observamos que $\sigma_* : Hom(M, C^{\otimes 2}) \to Hom(M, C^{\otimes 2})$ induce un morfismo en H^2 pues si $g : M \to C$, $\delta(g)(m) = m_{-1} \otimes g(m_0) - g(m_0) \otimes m_1$, entonces $\sigma_*(\delta(g)) = -\delta(g)$ (utilizamos el hecho de que M es cosimétrico). Por otro lado, consideremos $f : M \to C \otimes C$ tal que $\delta(f) = 0$, es decir que para todo $m \in M$

$$\delta(f)(m) = m_{-1} \otimes f(m_0) - \Delta_1 f(m) + \Delta_2(f(m)) - f(m_0) \otimes m_1 = 0$$

Escribamos $f(m) = x \otimes y$, $f(m_0) = u \otimes v$ (sumas sobreentendidas), recordamos que como M es cosimétrico, $m_0 \otimes m_1 = m_0 \otimes m_{-1}$. La ecuación anterior se escribe como:

$$m_1 \otimes u \otimes v - x_1 \otimes x_2 \otimes y + x \otimes y_1 \otimes y_2 - u \otimes v \otimes m_1 = 0$$

Ahora escribimos la ecuación para $\delta(\sigma_*(f))(m)$:

$$\delta(\sigma_*(f))(m) = m_1 \otimes v \otimes u - y_1 \otimes y_2 \otimes x + y \otimes x_1 \otimes x_2 - v \otimes u \otimes m_1$$

Si tomamos la ecuación de cociclo de f ($\delta(f)(m) = 0$) y le aplicamos la trasposición (13) (es decir, el operador $a \otimes b \otimes c \mapsto c \otimes b \otimes a$) y multiplicamos por -1 obtenemos

$$0 = -v \otimes u \otimes m_1 + y \otimes x_2 \otimes x_1 - y_2 \otimes y_1 \otimes x + m_1 \otimes v \otimes v$$

pero esta ecuación -tenida cuenta de la coconmutatividad de C- es exactamente la condición de cociclo de σf.

Ahora que sabemos que σ opera en $H^2(M,C)$ y como $\frac{1}{2} \in k$, la descomposición de $H^2(M,C)$ es inmediata, pues toda clase $[f]$ se puede escribir como $[f] = \frac{[f]+\sigma_*[f]}{2} + \frac{[f]-\sigma_*[f]}{2}$, y claramente $\frac{[f]+\sigma_*[f]}{2} \in H^2_{Har}(M,C)$.

Ya sabíamos de antes que los 2-cociclos parametrizaban las extensiones, veamos ahora que estos cociclos simétricos parametrizan las extensiones coconmutativas:

Sea $0 \to C \to E \to M \to 0$ una extensión y sea $\phi : E \to C$ un morfismo k-lineal tal que $\phi|_C = id_C$. El morfismo ϕ induce una partición de E como k-espacio vectorial dando un isomorfismo $E \cong C \oplus M$. Dada esta descomposición y dados los datos del problema (i.e. que C es una subcoálgebra, que M es un C-bicomódulo y que $E = C \wedge_E C$) la estructura de comultiplicación de E, se escribe necesariamente en la forma

$$C \oplus M \to (C \oplus M) \otimes (C \oplus M) = (C \otimes C) \oplus (C \otimes M) \oplus (M \otimes C) \oplus (M \otimes M)$$

$$(c,m) \mapsto (\Delta(c) + f(m), \rho^-(m), \rho^+(m), 0)$$

donde $f : M \to C \otimes C$ es k-lineal. La aplicación f puede escribirse también en términos de ϕ:

Si $m \in M$ y $e \in E$ es tal que $\pi(e) = m$, definimos $s(m) = e - \phi(e)$, es un ejercicio elemental ver que s está bien definida, es k-lineal y que verifica $\pi(s(m)) = m, \forall m \in M$. Una fórmula para f es entonces $f(m) = (\phi \otimes \phi)\Delta(s(m))$. La clase de f en $H^2(M,C)$ es el elemento que corresponde a la extensión $0 \to C \to E \to M \to 0$. Si E es coconmutativa, entonces $\sigma\Delta_E = \Delta_E$ y por lo tanto $\sigma f = f$, por l tanto $[f] \in H^2_{Har}(M,C)$. Recíprocamente, si $[f] \in H^2(M,C)$ donde M es un C-bicomódulo simétrico, podemos definir una comultiplicación en el k-espacio vectorial $E := C \oplus M$ mediante la fórmula $\Delta(c,m) = (\Delta(c) + f(m), \rho^-(m), \rho^+(m), 0)$ y esto da una extensión. En particular, si $[f] \in H^2_{Har}(M,C) \subset H^2(M,C)$, podemos elegir un representante $f : M \to C \otimes C$ tal que $\sigma_* f = f$ (sino lo cambiamos por $\frac{1}{2}(f + \sigma_* f)$, que es cohomólogo a f), y claramente E resulta coconmutativa.

Nota: La notación $H^2_{Har}(M,C)$ se debe a la analogía con la cohomología de Harrison para álgebras conmutativas.

Dado que la operación $\wedge$ aparece constantemente en las demostraciones de las propiedades relacionadas con la noción de suavidad que estudiaremos en la próxima subsección, damos aquí un resumen de sus propiedades, algunas sin demostración, para las demostraciones completas enviamos al lector a [Sw 69].

Definición 3.3. *Sea C una k-coálgebra, V, W dos subespacios de C, $p_V : C \to C/V$ y $p_W : C \to C/W$ las proyecciones naturales al cociente. Se define el subespacio de C, $V \wedge_C W := Ker((p_V \otimes p_W) \circ \Delta_C)$. Si está claro cual es la coálgebra C en la que se están haciendo las operaciones, escribiremos $V \wedge W$ en vez de $V \wedge_C W$.*

Proposición 3.4. *Sea C una k-coálgebra, son válidas las siguientes propiedades:*

- *para toda terna de subespacios $V_1,\ V_2, V_3 \subset C$, $(V_1 \wedge V_2) \wedge V_3 = V_1 \wedge (V_2 \wedge V_3)$.*

- *Si K y K' son dos subcoálgebras de C y C es coconmutativa entonces $K \wedge K'$ es una subcoálgebra de C.*

- *Si K es una subcoálgebra de C, $K \subset K \wedge K \subset K \wedge K \wedge K \subset \dots$*

- *Si S es una subcoálgebra simple, entonces $\wedge^\infty S := \cup_{n>0} \wedge^n S$ es la componente irreducible de C que contiene a S, donde $\wedge^1 S = S$ y $\wedge^{n+1} S = S \wedge^n S$.*

- *Si $C_0 = \oplus_{S \text{simple}} S$ es la suma (necesariamente directa) de la subcoálgebras simples de C, entonces la filtración $C_0 \subset C_1 = C_0 \wedge C_0 \subset C_2 = C_0 \wedge C_0 \wedge C_0 \subset C_3 \dots$ se llama la filtración coradical de C; si C es coconmutativa se tiene $C = \cup_{n \geq 0} C_n = \oplus_{S \text{simple}} \cup_{n>0} \wedge^n S$.*

Demostración: ver [Sw 69]

3.3. Coálgebras suaves

Definiremos una clase de k-coálgebras, a las que llamaremos suaves, en términos de propiedades de extensión con respecto a extensiones de coálgebras coconmutativas:

Definición 3.5. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa, diremos que C es* **suave** *si y sólo si para cualquier extensión de coálgebras coconmutativas $0 \to D \to E \to M \to 0$ con $E = D \wedge_E D$, dado un morfismo de coálgebras $f : D \to C$, existe una extensión de f a E, es decir, existe un morfismo de coálgebras $\widetilde{f}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] & M \arrow[r] & 0 \\ & C & & & \end{tikzcd}$$

A partir de la caracterización cohomológica de las extensiones coconmutativas, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 3.6. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa, son equivalentes:*

- *C es suave.*

- *Para todo C-bicomódulo cosimétrico M, $H^2_{Har}(M, C) = 0$.*

Demostración: Supongamos que C es suave y que M es un C-bicomódulo simétrico. Sea $f : M \to C \otimes C$ un 2-cociclo de $H^2_{Har}(M, C)$ y definamos $E = C \oplus M$ con la comultiplicación $\Delta(c, m) = \Delta(c) + f(m) + \rho^-(m) + \rho^+(m) \in (C \otimes C) \oplus (C \otimes M) \oplus (M \otimes C) \subset (C \oplus M)^{\otimes 2}$.

A partir del diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[dl, dashed, "\widetilde{id}"] & M \arrow[r] & 0 \\ & C & & & \end{tikzcd}$$

sabemos, por la suavidad de C, que existe un morfismo de coálgebras $\widetilde{id} : E \to C$ tal que $\widetilde{id}|_C = id_C$, por lo tanto $[f] = 0$.

Recíprocamente supongamos que $H^2_{Har}(M, C) = 0$ para todo C-bicomódulo simétrico M y consideremos una extensión arbitraria mas un morfismo de coálgebras

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ & C & & & \end{tikzcd}$$

Sea $P := C \oplus_D E = \frac{C \oplus E}{\langle (0,d) - (f(d), 0) \rangle}$. El espacio $C \oplus E$ claramente admite una estructura de coálgebra, pero además esta estructura da origen a una estructura de coálgebra en P. Llamemos $\pi : C \oplus E \to P$ la aplicación al cociente, entonces P es una coálgebra definiendo

$$\Delta_P : P \to P \otimes P$$

$$\begin{cases} \Delta_P(\pi(c, 0)) = (\pi \otimes \pi)\Delta_C(c) & \text{si } c \in C \\ \Delta_P(\pi(0, e)) = (\pi \otimes \pi)\Delta_E(e) & \text{si } e \in E \end{cases}$$

Se tienen morfismos naturales $C \to P$ y $E \to P$, y un morfismo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & P \arrow[r] & P/C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por inspección, $M \cong P/C$ con lo cual es un C-bicomódulo y se tiene $P = C \wedge_P C$. Por hipótesis $H^2_{Har}(M, C) = 0$, por lo tanto la sucesión exacta corta de abajo se parte con un morfismo de coálgebras, componiendo ese morfismo con la flecha $E \to P$ se obtiene la extensión $\widetilde{f}$ buscada.

Corolario 3.7. *La coálgebra $sh(x) = T(k.x)$ es suave.*

Demostración: si V es un espacio vectorial y M un $T(V)$-bicomódulo cualquiera, sabemos que $H^2(T(V), M) = 0$. En particular, cuando $dim_k(V) = 1$, $T(V) = sh(x)$, es coconmutativa, y $H^2(sh(x), M)$ es cero para todo bicomódulo, como $H^2_{Har}(sh(x), M)$ es un sumando directo de $H^2(sh(x), M)$ se sigue que $sh(x)$ es suave.

3.4. Coderivaciones y Ω^1_C

Definiremos un objeto universal para las coderivaciones a valores sobre una coálgebra conmutativa a valores en un bicomódulo simétrico que resultará un comódulo. Veremos después como se relacionan algunas propiedades de este comódulo con respecto a la propiedad de suavidad.

Sea C una coálgebra y M un C-bicomódulo, recordamos que una aplicación k-lineal $f : M \to C$ se dice una coderivación en caso de que se verifique la igualdad (en $Hom(C, C \otimes M \oplus M \otimes C)$):

$$\Delta f = (id \otimes f) \circ \rho^{-} + (f \otimes id) \circ \rho^{+}$$

Llamamos $Der_k(M, C)$ al conjunto de coderivaciones de M en C, que coincide con los 1-cociclos (sin identificación de cobordes) del complejo que calcula $H^*(M, C)$. Tenemos definido un funtor contravariante $Der_k(-, C)$ de la categoría de C-bicomódulos en la de k-espacios vectoriales. En [Doi 81], Y. Doi demuestra que este funtor es (co)representable, es decir, que existe un C-bicomódulo L_C tal que

$$Hom_{C^e}(M, L_C) \cong Der_k(M, C)$$

El bicomódulo L_C no es otra cosa que $\frac{C \otimes C}{Im(\Delta : C \to C \otimes C)}$. Del morfismo identidad de $Hom_{C^e}(L_C, L_C)$ se obtiene una derivación $d : L_C \to C$, que está definida por $d(\overline{x \otimes y}) = \epsilon(x)y - \epsilon(y)x$.

Si C es una coálgebra coconmutativa, podemos restringir el funtor $Der_k(-, C)$ a la categoría de C-bicomódulos simétricos, y preguntarnos si este funtor es representable. La respuesta es sí, y la construcción es sencilla, pues sabemos que si $D : M \to C$ es una coderivación, D induce un morfismo de C-bicomódulos $\widetilde{D} : M \to L_C$, pero como M es C-cosimétrico, también lo será el subcomódulo $Im(\widetilde{D})$. Si definimos Ω^1_C como la unión de todas las imágenes de morfismos de C^e-colineales con dominio en bicomódulos cosimétricos y codominio L_C tenemos que Ω^1_C es un objeto universal para las coderivaciones con dominio en tales bicomódulos, y coincide con el mayor sub-bicomódulo de L_C que es C-cosimétrico.

Esta construcción es dual a la construcción de los diferenciales de Kähler en el siguiente sentido:

Proposición 3.8. *Sea A una k-álgebra conmutativa y consideremos $C = A^0$. Entonces $\Omega^1_C = \Omega^1_k(A)^0$ donde si M es un A-módulo, M^0 es el subespacio mas grande de M^* que es un C-comódulo con la coacción traspuesta a la de M.*

Demostración: La construcción $(-)^0$ es un adjunto al funtor $(-)^*$, tanto para la versión álgebras $\to$ coálgebras como para la versión módulos $\to$ comódulos. Tenemos entonces la siguiente cadena de isomorfismos

$$Der_k(M, C) = Der_k(M, A^0) \cong Der_k(A, M^*) \cong$$

$$\cong Hom_A(\Omega^1_k(A), M^*) \cong Com_C(M, (\Omega^1_k(A))^0)$$

lo que demuestra la proposición.

Como en el caso de álgebras, la noción de suavidad está relacionada con propiedades del Ω^1:

Proposición 3.9. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa suave, entonces Ω^1_C es un C-comódulo inyectivo.*

Demostración: Consideremos $i : N \to M$ un monomorfismo de C-comódulos, queremos ver que $i^* : Com_C(M, \Omega^1_C) \to Com_C(N, \Omega^1_C)$ es sobreyectivo. Por la adjunción, esto es equivalente a ver que $i^* : Der_k(M, C) \to Der_k(N, C)$ sea sobreyectivo.

En general, dado X un C-bicomódulo, definimos sobre $C \oplus X$ la estructura de coálgebra siguiente:

$$\Delta : C \oplus X \to (C \oplus X) \otimes (C \oplus X) = (C \otimes C) \oplus (C \otimes X) \otimes (X \otimes C) \oplus (X \otimes X)$$

$$(c, x) \mapsto (\Delta(c), \rho^-(x), \rho^+(x), 0)$$

Además vemos que la construcción es claramente funtorial, (considerando como categoría de llegada la categoría de coálgebras que contienen a C y morfismos de coálgebras que restringidos a C son la identidad). Además, tener un morfismo de coálgebras $C \oplus X \to C$ que es la identidad sobre C induce (por restricción a X) una coderivación, por lo tanto se tiene el isomorfismo:

$$Der_k(X, C) \cong Hom_{C\text{-coalg}}(C \oplus X, C)$$

En particular, podemos considerar las coálgebras $D = C \oplus N$ y $E = C \oplus M$ con la estructura mencionada anteriormente. El morfismo $id \oplus i : D \to E$ es un monomorfismo de coálgebras con conúcleo M/N, que es un C-bicomódulo, por lo tanto un D-bicomódulo y en consecuencia $E = D \wedge_E D$. Por la suavidad de C, tenemos que $(id \oplus i)^* : Hom_{C\text{-coalg}}(D, C) \to Hom_{C\text{-coalg}}(E, C)$ es sobreyectivo, y en vistas del isomorfismo $Der_k(X, C) \cong Hom_{C\text{-coalg}}(C \oplus X, C)$ obtenemos que $i^* : Der_k(M, C) \to Der_k(N, C)$ es sobreyectiva y la proposición queda demostrada.

Dada una coálgebra coconmutativa C, es sabido que C se descompone en suma directa de subcoálgebras irreducibles (ver [Sw 69], Teorema 8.0.5, pág. 163), la próxima proposición muestra la relación de la propiedad de suavidad con respecto a las descomposiciones.

Proposición 3.10. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa suave tal que C se descompone como suma directa de subcoálgebras $C \cong \oplus_i C_i$. Entonces C_i es suave para todo i.*

Demostración: Elijamos un índice i. Sea $f : D \to C_i$ un morfismo de coálgebras y $0 \to D \to E \to M \to 0$ una extensión coconmutativa de D tal que $E = D \wedge_E D$. Componiendo con la inclusión $C_i \to C$ tenemos un morfismo de coálgebras $f_i : D \to C$, y como C es suave, existe $\widetilde{f_i} : E \to C$ morfismo de coálgebras que extiende a f_i. Llamamos $\widetilde{f} : E \to C_i$ a la composición de $\widetilde{f_i}$ con la proyección $p_i : C \to C_i$. Claramente este morfismo es comultiplicativo, y si llamamos $j : D \to E$, vale que $\widetilde{f} \circ j = p_i \circ \widetilde{f_i} \circ j = p_i \circ f_i = f$. Para ver que respete la counidad, veremos equivalentemente que su traspuesta sea un morfismo que respete el uno. Considerando el diagrama dual:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^* \arrow[r] & E^* \arrow[r, "\pi"] & D^* \arrow[r] & 0 \\
& & & (C_i)^* \arrow[ul, "\widetilde{f}^*"] \arrow[u, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que f^*, π y $\widetilde{f}^*$ son multiplicativos y que f^* y π son unitarios, por lo tanto $\widetilde{f}^*(1) = 1+m$ con $m \in M$. Además sabemos que $D \wedge_E D = E$, por lo tanto $(M^*)^2 = (D^\perp)^2 = (D \wedge_E D)^\perp = E^\perp = 0$, entonces utilizando la multiplicatividad de $\widetilde{f}^*$ y que $1^2 = 1$ obtenemos la igualdad:

$$1 + m = \widetilde{f}^*(1) = \widetilde{f}^*(1^2) = (1+m)^2 = 1 + 2m$$

por lo que $m = 2m$, o sea, $m = 0$. Recordamos que $1_{E^*} = \epsilon_E$, $1^*_{C_i} = \epsilon_{C_i}$, por lo tanto la ecuación $\widetilde{f}^*(1) = 1$ significa exactamente $\epsilon_E = \epsilon_{C_i} \circ \widetilde{f}$.

Proposición 3.11. *Sean C_1 y C_2 dos k-coálgebras coconmutativas. Entonces $C_1 \otimes C_2$ es suave si y sólo si C_1 y C_2 son suaves.*

Demostración: es consecuencia de que el producto tensorial es el producto en la categoría de coálgebras coconmutativas, con proyecciones $p_1 = id_{C_1} \otimes \epsilon_{C_2} : C_1 \otimes C_2 \to C_1$ y $p_2 = \epsilon_{C_1} \otimes id_{C_2} : C_1 \otimes C_2 \to C_2$. Si $i : D \to E$ es un monomorfismo de coálgebras coconmutativas tal que $E = D \wedge_E D$ queremos ver qué sucede con $i^* : Hom_{coalg}(E, C_1 \otimes C_2) \to Hom_{coalg}(D, C_1 \otimes C_2)$. Pero como $C_1 \otimes C_2$ es el producto en la categoría de coálgebras coconmutativas, i^* se parte como producto de dos flechas $i^* = i_1^* \times i_2^* : Hom_{coalg}(E, C_1) \times Hom_{coalg}(E, C_2) \to Hom_{coalg}(D, C_1) \times Hom_{coalg}(D, C_2)$, por lo tanto i^* es suryectiva si y solo si i_1^* e i_2^* lo son simultáneamente.

Corolario 3.12. *La coálgebra $sh(x_1, \ldots, x_n)$ es suave.*

Demostración: solamente recordamos que $sh(x_1, \ldots, x_n) = sh(x_1) \otimes \ldots \otimes sh(x_n)$, y ya sabíamos que $sh(x)$ era suave.

Proposición 3.13. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa y K una subcoálgebra de C. Supongamos que existe un morfismo de coálgebras $p : C \to K$ que verifica $p|_K = id$. Entonces, si C es suave, también es suave K.*

Demostración: probaremos que K tiene la propiedad de extensión con respecto a extensiones coconmutativas.

Consideremos $D \to E$ un monomorfismo de coálgebras tal que $E = D \wedge_E D$ y sea $f : D \to K$. Como K es una subcoálgebra de C, f puede ser considerado como un morfismo de D en C, y al ser C suave, existe una extensión $f' : E \to C$ tal que $f'|_D = f$. Definimos entonces $\widetilde{f} := p \circ f' : E \to K$.

Claramente $\widetilde{f}$ es un morfismo de coálgebras, para ver que extiende a f notamos que $p \circ f'|_D = p \circ f$, pero como $Im(f) \subseteq K$ y $p|_K = id$ entonces $p \circ f = f$.

3.5. Sucesiones exactas del Ω^1_C

Demostraremos en esta sección resultados que ligan Ω^1_C y Ω^1_K cuando $K \subseteq C$ es una subcoálgebra. Para esto necesitaremos dos lemas sobre propiedades generales de la operación $\wedge$.

Lema 3.14. *Sea C una coálgebra coconmutativa y $e \in C$ un elemento tipo grupo, entonces $k.e \wedge k.e$ consiste en la suma de $k.e$ mas los elementos e-primitivos, mas aún, si $x \in k.e \wedge k.e$ entonces*

$$\Delta(x) = x \otimes e + e \otimes x - \epsilon(x)e$$

Demostración: como $x \in k.e \wedge k.e$ entonces $\Delta(x) \in k.e \otimes C + C \otimes k.e$, luego $\Delta(x)$ se escribe de la forma $\Delta(x) = a \otimes e + e \otimes b$ Como C es coconmutativa, podemos escribir $\Delta(x) = a \otimes e + e \otimes a$ para algún $a \in C$, o bien, (cambiando eventualmente a a por $a' = a - \epsilon(a).e$), escribimos a $\Delta(x)$ como

$$\Delta(x) = a \otimes e + e \otimes a + \lambda.e \otimes e$$

con $\epsilon(a) = 0$. Como $\epsilon(a) = 0$, se sigue que $\lambda = \epsilon(x)$, aplicando $\epsilon \otimes id$ y utilizando el hecho de que $\epsilon(e) = 1$ tenemos que

$$x = (\epsilon \otimes id)\Delta(x) = (\epsilon \otimes id)(a \otimes e + e \otimes a + \epsilon(x).e \otimes e) = a + \epsilon(x).e$$

de lo que despejamos $a = x - \epsilon(x)$. Volviendo a la ecuación $\Delta(x) = a \otimes e - e \otimes a + \epsilon(x)e \otimes e$, reemplazando a por $x - \epsilon(x).e$ obtenemos la fórmula de la proposición.

Lema 3.15. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa, e un elemento de tipo grupo en C. Entonces la aplicación*

$$f : k.e \wedge k.e \to C$$
$$x \mapsto x - \epsilon(x).e$$

es una coderivación.

Demostración: por el lema anterior, sabemos que $\Delta(x) = x \otimes e + e \otimes x - \epsilon(x)e \otimes e$, luego

$$(f \otimes id - id \otimes f)\Delta(x) = (x - \epsilon(x)e) \otimes e + e \otimes (x - \epsilon(x)e) =$$

$$= x \otimes e + e \otimes x - 2\epsilon(x)e \otimes e$$

por otro lado

$$\Delta(f(x)) = \Delta(x - \epsilon(x).e) =$$
$$x \otimes e + e \otimes x - \epsilon(x)e \otimes e - \epsilon(x)e \otimes e$$

y la ecuación de coderivación queda verificada.

El lema anterior se generaliza de la siguiente manera:

Lema 3.16. *Sea C una k-coálgebra y sea K una subcoálgebra de C. Supongamos que existe un morfismo de coálgebras $\psi : K \wedge K \to K$ tal que $\phi|_K = id_K$, entonces $D := Id - \psi : K \wedge K \to C$ es una coderivación.*

Demostración: Como en el lema anterior, comenzamos por explicitar la comultiplicación en $K \wedge K$. Sea $c \in K \wedge K$, como $K \wedge K$ es una subcoálgebra, $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ con $c_i \in K \wedge K$, además $\Delta(c) \in K \otimes C + C \otimes K$. Escribimos entonces $\Delta(c) = x' \otimes a' + b' \otimes y'$ (sumas sobre-entendidas) en donde $a', \ b' \ \in K$ y $x', \ y' \ \in K \wedge K$. Como $x' \in K \wedge K$, podemos aplicarle ψ y tenemos que $x' = (x' - \psi(x')) + \psi(x')$ y escribimos entonces a x' como un elemento de $Ker(\psi)$ mas un elemento de K. Haciendo el mismo proceso con y' tenemos una fórmula para $\Delta(c)$ del siguiente tipo:

$$\Delta(c) = x \otimes a + b \otimes y + \alpha \otimes \beta$$

donde $x, \ y \ \in Ker(\psi)$ y $a, \ b, \ \alpha, \ \beta \ \in K$.

Como ψ es un morfismo de coálgebras, entonces $\Delta(\psi(c)) = (\psi \otimes \psi)\Delta(c) = \alpha \otimes \beta$, entonces

$$\Delta(c - \psi(c)) = x \otimes a + b \otimes y$$

Por otro lado, $Id - \psi$ se anula en K con lo cual resulta fácil calcular $(Id-\psi) \otimes id + id \otimes (Id - \psi)$ sobre $\Delta(c)$, tenemos

$$((Id - \psi) \otimes id + id \otimes (Id - \psi)) (x \otimes a + b \otimes y + \alpha \otimes \beta) =$$

$$= (Id - \psi)(x) \otimes a + b \otimes (Id - \psi)(y) = x \otimes a + b \otimes y$$

pues $x, \ y \ \in Ker(\psi)$.

Ahora estamos en condiciones de demostrar los resultados de sucesiones exactas que relacionan Ω^1_C y Ω^1_K donde K es una subcoálgebra de C.

Proposición 3.17. *Sea C una k-coálgebra y K una subcoálgebra de C. Entonces*

1. *Se tiene una sucesión exacta de C-comódulos*

$$0 \to \Omega^1_K \to \Omega^1_C \Box_C K \to \frac{K \wedge_C K}{K}$$

2. *Si $K = k.e$ donde e es un elemento de tipo grupo, entonces $\Omega^1_K = 0$ y $\Omega^1_C \Box_C K \cong (K \wedge K)/K$.*

Demostración: El morfismo $\Omega^1_K \to \Omega^1_C \Box_C K$ está definido de la siguiente manera:

En primer lugar $K \otimes K \subseteq C \otimes C$, y como K es una subcoálgebra, esta inclusión da lugar a un morfismo $(K \otimes K)/\Delta(K) \to (C \otimes C)/\Delta(C)$. Es claro que los elementos cosimétricos de $(K \otimes K)/\Delta(K)$ son enviados en elementos cosimétricos de $(C \otimes C)/\Delta(C)$, por lo tanto Ω^1_K es enviado en Ω^1_C. Más aún, es claro que el morfismo de estructura de Ω^1_K tiene imagen en $\Omega^1_K \otimes K$, por lo tanto, la imagen de Ω^1_K no solo está contenida en $\Omega^1_C = \Omega^1_C \Box_C C$, sino que también está contenida en $\Omega^1_C \Box_C K$.

El morfismo $\Omega^1_C \Box_C K \to (K \wedge K)/K$ está definido como sigue:

Sea $d : \Omega^1_C \to C$ la coderivación universal, $d(\overline{x \otimes y}) = \epsilon(x)y - \epsilon(y)x$, y sea $p : C \to C/K$ la proyección al cociente. Se define, para $\overline{x \otimes y} \otimes z \in \Omega^1_C \Box_C K$, $\delta(\overline{x \otimes y} \otimes z) =$

$p\left(d(\overline{x \otimes y})\epsilon(z)\right)$ La imagen de δ está contenida en $(K \wedge K)/K$ en vez de tan solo en C/K pues el dominio es $\Omega^1_C \Box_C K$ en vez de $\Omega^1_C \Box_C C$.

Si $\overline{x \otimes y} \in \Omega^1_K$, el elemento que le corresponde en $\Omega^1_C \Box_C K$ es $\overline{x \otimes y_1} \otimes y_2$, y δ aplicado a este elemento es $p(\epsilon(x)y_1\epsilon(y_2) - \epsilon(y_1)\epsilon(y_2)x) = p(\epsilon(x)y - \epsilon(y)x) = 0$ pues x e y son elementos de K.

Para demostrar la exactitud de la sucesión, basta demostrar que para todo K-bicomódulo simétrico T, la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to Com_K(T, \Omega^1_K) \to Com_K(T, \Omega^1_C \Box_C K) \to Com_K(T, (K \wedge K)/K)$$

En el espacio vectorial que aparece en el medio de la sucesión, utilizamos la adjunción de $-\Box_C K$ (como $K \subseteq C$, K es C-quasi-finito) y obtenemos

$$Com_K(T, \Omega^1_C \Box_C K) \cong Com_C(h_K(K, T)\Omega^1_C) = Com_C(T, \Omega^1_C).$$

Utilizando ahora la propiedad universal de Ω^1, obtenemos que la sucesión anterior es isomorfa a la siguiente sucesión:

$$0 \to Der_k(T, K) \to Der_k(T, C) \to Com_C(T, (K \wedge K)/K) \subseteq Com_C(T, C/K)$$

La primera flecha claramente es un monomorfismo, pues toda coderivación con imagen en K puede ser vista como coderivación con imagen en C. La segunda flecha es componer con $p : C \to K$ (pues $\delta = p \circ d$). Sabemos que la composición es cero, y si $D : T \to C$ es una coderivación tal que $p \circ D = 0$ donde $p : C \to C/K$ es la proyección, entonces claramente la imagen de D está contenida en K, por lo tanto proviene de $Der_k(T, K)$, y la exactitud queda demostrada.

Supongamos ahora que $K = k.e$ con e elemento de tipo grupo. Es claro que $\Omega^1_K = 0$ pues si $F : T \to K$ entonces $F(t) = f(t).e$ con $f \in T^*$, de lo que se sigue que $f(t) = \epsilon(F(t))$. Pero si F es una coderivación entonces $\epsilon \circ F = 0$ por lo tanto en este caso, no importa cual sea T, $Der_k(T, K) = 0$ y es claro que el funtor nulo se representa como $Com_K(-, 0)$.

Definiremos ahora un morfismo $(K \wedge K)/K \to \Omega^1_C \Box_C K$, o lo que es lo mismo, una coderivación $K \wedge K \to C$ que se anule en K, pues

$$Com_K((K \wedge K)/K, \Omega^1_C \Box_C K) = Com_C((K \wedge K)/K, \Omega^1_C) = Der_k((K \wedge K)/K, C).$$

Sea $f : K \wedge K \to C$ definida por $f(x) = x - \epsilon(x).e$. Es claro que se anula sobre K, pues $f(e) = e - \epsilon(e).e = 0$, y en virtud del Lema 3.15 es una coderivación.

Para ver que f induce el morfismo inverso, haremos explícito el morfismo $\widetilde{f} : (K \wedge K)/K \to \Omega^1_C \Box_C K$ que proviene de f, que es el siguiente:

$$\widetilde{f} : (K \wedge K)/K \to \Omega^1_C \Box_C K$$
$$\overline{x} \mapsto \rho^+(\overline{x_1 \otimes f(x_2)})$$

Ahora bien, conociendo la expresión de f, tenemos que

$$\overline{x_1 \otimes f(x_2)} = \overline{x_1 \otimes (x_2 - \epsilon(x_2).e)} = \overline{\Delta(x) - x \otimes e} = -\overline{x \otimes e}$$

y por lo tanto $\widetilde{f}(\overline{x}) = -\overline{x \otimes e} \otimes e$.

Ahora que disponemos de un morfismo explícito calculamos la composición: $\delta(\widetilde{f}(\overline{x}) = -\delta(\overline{x \otimes e} \otimes e) = -\overline{(\epsilon(x).e - \epsilon(e).x)\epsilon(e)} = -\overline{\epsilon(x).e - x} = \overline{x}$ pues $e \in K$.

Para la otra composición, dado $\overline{z \otimes w} \otimes e \in \Omega^1_C \square_C K$, utilizando la cosimetría y el hecho de que el elemento está en el producto cotensorial, obtenemos las igualdades:

$$\overline{z \otimes w_1} \otimes w_2 \otimes e = \overline{z_2 \otimes w} \otimes z_1 \otimes e = \overline{z \otimes w} \otimes e \otimes e$$

Aplicando $d \otimes id \otimes \epsilon$ obtenemos $\epsilon(z)\Delta(w) - z \otimes w = w \otimes z - \epsilon(w)\Delta(z) = (\epsilon(z)w - \epsilon(w)z) \otimes e$. Si calculamos entonces $\widetilde{f}(\delta(\overline{z \otimes w} \otimes e))$ obtenemos

$$\widetilde{f}(\delta(\overline{z \otimes w} \otimes e)) = \widetilde{f}(\overline{\epsilon(z)w - \epsilon(w)z}) =$$
$$= -\overline{(\epsilon(z)w - \epsilon(w)z) \otimes e} \otimes e = \overline{z \otimes w} \otimes e$$

Notamos que si $K = k.e$, K es suave. La parte 2 de la proposición anterior se generaliza a las coálgebras suaves:

Proposición 3.18. *Sea C una k-coálgebra y K una subcoálgebra. supongamos K suave, entonces tenemos una sucesión exacta corta escindida:*

$$0 \to \Omega^1_K \to \Omega^1_C \square_C K \to \frac{K \wedge_C K}{K} \to 0$$

Demostración: Sólo tenemos que demostrar que $\delta : \Omega^1_C \square_C K \to \frac{K \wedge K}{K}$es un epimorfismo que se parte. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to K \to K \wedge_C K \to (K \wedge_C K)/K \to 0$$

Como K es una subcoálgebra de C, entonces $K \wedge_C K$ es también una subcoálgebra y además claramente $K \wedge_C K = K \wedge_{K \wedge_C K} K$, por lo tanto $K \wedge_C K$ es una extensión coconmutativa del tipo de la definición de suavidad. Como K es suave, existe un morfismo de coálgebras $\phi : K \wedge_C K \to K$ tal que $\phi|_K = id$. Definimos entonces

$$f : K \wedge_C K \to C$$

$$x \mapsto x - \phi(x)$$

Es claro que f se anula sobre K, además por el Lema 3.16 f es una coderivación. De esta manera f induce un morfismo $\widetilde{f} : (K \wedge K)/K \to \Omega^1_C$ y es fácil ver que la imagen está contenida en $\Omega^1_C \square_C K$.

La comprobación de que $\widetilde{f}$ es el inverso a derecha de δ es la misma cuenta que en la demostración de la parte 2. de la proposición anterior. En primer lugar explicitamos $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(\overline{x}) = \rho^+(\overline{(id \otimes f)\rho^-(\overline{x})}) =$$
$$= \rho^+(\overline{x_1 \otimes (x_2 - \phi(x_2))}) = -\rho^+(\overline{x_1 \otimes \phi(x_2)}) =$$
$$= -\overline{x_1 \otimes \phi(x_2)} \otimes x_3$$

Ahora calculamos $\delta(\widetilde{f})(\overline{x}) =$

$$\delta(-\overline{x_1 \otimes \phi(x_2)} \otimes x_3) = -\epsilon(x_3)\,(\epsilon(x_1)\phi(x_2) - \epsilon(\phi(x_1))x_2) =$$
$$= -\overline{\phi(x) - x} = \overline{x}$$

pues $\phi(x) \in K$.

3.6. Teorema de estructura de coálgebras coconmutativas suaves

Sea C una k-coálgebra coconmutativa, entonces $C = \oplus_i C_i$ es una suma directa de subcoálgebras irreducibles, cada una de ellas contiene una única subcoálgebra simple. Si asumimos que el cuerpo de base k es algebraicamente cerrado, entonces las coálgebras simples son exactamente las subcoálgebras de dimensión uno. Esto es así por lo siguiente: toda coálgebra contiene subcoálgebras de dimensión finita, luego las subcoálgebras simples son de dimensión finita. Si una coálgebra no tiene subcoálgebras propias significa que el álgebra dual no tiene cocientes, o lo que es lo mismo no tiene ideales propios, en particular es íntegra y de dimensión finita, por lo tanto es una extensión finita, al pedir k algebraicamente cerrado, la única extensión finita es el cuerpo mismo.

Llamaremos a una k-coálgebra coconmutativa **local**, en caso de que sea irreducible y su subcoálgebra simple sea de dimensión uno. En caso de que k sea algebraicamente cerrado, local e irreducible son el mismo concepto. El objetivo de esta sección es dar un teorema de estructura para las coálgebras locales suaves sobre un cuerpo de característica cero.

Teorema 3.19. *Sea C una coálgebra local suave y llamemos $K := k.e$ donde e es el único elemento de tipo grupo de C. Asumamos que $dim(K \wedge_C K) < \infty$, entonces $C \cong sh(V)$ donde V es el espacio vectorial $Prim(C) \cong \frac{K \wedge_C K}{K}$.*

Para demostrar este teorema, probaremos a continuación un lema:

Lema 3.20. *Sea C una coálgebra coconmutativa tal que $\Omega^1_C \cong C^{(I)}$, entonces existe una coderivación $D : C \to C$ y un elemento $x \in C^*$ tal que $x \circ D = \epsilon$.*

Demostración: Llamemos $f : C^{(I)} \to \Omega^1_C$ al isomorfismo, entonces, para cada $i \in I$ obtenemos una coderivación $\widetilde{D_i}$ componiendo la inclusión $j_i : C \to C^{(I)}$ (cuya imagen denotaremos $C.i$) con la coderivación universal:

$$C \xrightarrow{j_i} C^{(I)} \xrightarrow{f} \Omega^1_C \xrightarrow{d} C$$

Afirmación: La propiedad universal de Ω^1_C implica que $\cap_{i\in I} Ker(\widetilde{D_i})$ no contiene subcomódulos no triviales.

Demostraremos la afirmación. Sea N un subcomódulo de C tal que para todo $i \in I$, $N \subset Ker(\widetilde{D_i})$ y llamemos $i_N : N \to C$ a la inclusión de N en C. Como

$$Com_C(N, C^{(I)}) \cong Com_C(N, \Omega^1_C) \cong Der(N, C)$$

$$j_i \circ i_N \mapsto f \circ j_i \circ i_N \mapsto \widetilde{D_i}|_N = 0$$

se sigue que la inclusión natural $Com_C(N, C^{(I)}) \to \prod_{i\in I} Com_C(N, C.i)$ es la flecha nula, por lo tanto $Com_C(N, C^{(I)}) = 0$ lo que implica $N = 0$. Se sigue de esto que si $N \subset C$ es un subcomódulo no trivial, existe una coderivación que no se anula identicamente sobre N.

Tomamos en particular $N = k.e$ donde e es el único elemento de tipo grupo de C, luego existe un índice i tal que $\widetilde{D}_i(e) \neq 0$; llamamos $\widetilde{D}$ a esa coderivación.

Como $\widetilde{D}(e) \neq 0$, existe $x \in C^*$ tal que $x(\widetilde{D}(e)) \neq 0$. Al ser C^* un álgebra local y $x \circ \widetilde{D} \notin k.e^{\perp}$, se sigue que $x \circ \widetilde{D}$ es una unidad de C^*.

Tomemos $u \in C^*$ el inverso de $x \circ \widetilde{D}$ (i.e. $u * (x \circ \widetilde{D}) = (x \circ \widetilde{D}) * u = \epsilon$) y definamos D como la composición de $\widetilde{D}$ con la multiplicación en C por u (visto C como C^*-módulo), más precisamente

$$D(c) := \widetilde{D}(u(c_1)c_2)$$

Es una coderivación pues es la composición de un morfismo de C-bicomódulos con una coderivación. Esta coderivación D y el elemento x verifican $x \circ D = \epsilon$, pues utilizando la fórmula de coderivación $\Delta \circ D = (D \otimes id) \circ \Delta + (id \otimes D) \circ \Delta$, obtenemos, aplicando $x \otimes id$, que para todo $c \in C$

$$x.D(c) = D(x.c) + (x \circ D).c$$

Por otro lado,

$$(x \circ D).c = x(D(c_1))c_2 = x(\widetilde{D}(u(c_1)c_2))c_3 =$$
$$= u(c_1)x(\widetilde{D}(c_2))c_3 = \left(u * (x \circ \widetilde{D})\right)(c_1)c_2 =$$
$$\epsilon(c_1)c_2 = c$$

por lo tanto

$$x.D(c) = D(x.c) + c$$

Aplicando ϵ a la ecuación anterior obtenemos (usando que $\epsilon \circ D = 0$ y que $\epsilon(f.c) = f(c)\ \forall f \in C^*$) que $x(D(c)) = \epsilon(c)$.

Teorema 3.21. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa local tal que existe $D : C \to C$ una coderivación y $x \in C^*$ verificando $x(D(c)) = \epsilon(c)$. Asumamos que $\mathbb{Q} \subset k$, entonces*

$$C \cong \widetilde{C} \otimes sh(x)$$

donde $\widetilde{C}$ es la coálgebra $Ker(x.) \cong C/Im(D)$ y $sh(x)$ denota la coálgebra shuffle en un generador: $sh(x) = \oplus_{n\geq 0} k.x^n$, con comultiplicación definida por $\Delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i}$.

Demostración: Denotemos por e al único elemento de tipo grupo de C. Dado $t \in C^*$ que verifique $t(e) = 0$ tenemos que la multiplicación por t es localmente nilpotente pues $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} \wedge^n k.e$ y t^n se anula sobre $\wedge^n k.e$, por lo tanto, está bien definido el siguiente operador lineal:

$$E(D,t) : C \to C$$
$$c \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{D^n}{n!}(t^n.c)$$

Más aún, puede chequearse (verificando sobre cada $\wedge^n k.e$) que es un morfismo de coálgebras.

Como vale la fórmula $x \circ D = \epsilon$ y $x.D(c) = D(x.c) + (x \circ D).c$ tenemos que

$$[x., D] = id_C$$

donde $x.$ denota el operador multiplicación por x.

Definimos $E := E(D, -x) : C \to C$ (si $x(e) \neq 0$ cambiamos a x por $x - x(e).\epsilon$). Notamos que si $x.c = 0$, entonces $E(c) = c$ y por lo tanto $c \in Im(E)$, recíprocamente, si $c = E(d)$ para cierto d, entonces

$$x.c = \sum_{n\geq 0} x.(-1)^n \frac{D^n}{n!}(x^n.d)$$

Al valer $[x., D] = id$ se prueba por inducción que que $[x, D^n] = n.D^{n-1}$ y por lo tanto se obtiene la fórmula

$$x.E(d) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{D^n}{n!}(x^{n+1}.d) + \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{nD^{n-1}}{n!}(x^n.d) =$$

$$= E(x.d) - E(x.d) = 0$$

por lo tanto $Im(E) = Ker(x.)$.

Como consecuencia de esto, tenemos también la fórmula $E(E(c)) = E(c)$ para todo c, pues $E(c) \in Ker(x.)$ y habíamos visto que si un elemento estaba en el núcleo de $x.$ entonces quedaba fijo por E. Claramente $E(c) - c \in Im(D)$, y por lo tanto $Im(D) \subseteq Ker(E)$ (pues $E^2 = E$). Por otro lado, si $E(c) = 0$ entonces $c = -\sum_{n\geq 1} \frac{D^n}{n!}(x^n.c)$ con lo cual $c \in Im(D)$, o sea que $Im(D) = Ker(E)$. Tenemos entonces los isomorfismos de coálgebras

$$C/Im(D) = C/Ker(E) \cong Im(E) = Ker(x.)$$

Se definen los siguientes morfismos, que serán uno el inverso del otro:

$$\phi : C \to \widetilde{C} \otimes sh(x)$$

$$c \mapsto \sum_{n\geq 0} \overline{x^n.c} \otimes x^n$$

y

$$\psi : \widetilde{C} \otimes sh(x) \to C$$
$$\sum_{n\geq 0} \overline{c_n} \otimes x^n \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{D^n}{n!} E(c_n)$$

(notar que ambas sumas son siempre finitas) Ver que son morfismos de coálgebras es solamente verificación. Para verificar que uno es el inverso del otro primero se obtienen inductivamente fórmulas de conmutación entre x^n. y D^m (que son las fórmulas de conmutación del álgebra de Weyl, ya que $[x., D] = id$) y se utiliza la fórmula combinatoria $\sum_{i=0}^{2k} \frac{(-1)^i}{(2k-i)!i!} = 0$.

Observación: Si $Ker(x.) = k.e$, lo que hemos demostrado es que $C \cong sh(x)$. Además, si C es suave, $\widetilde{C}$ hereda la propiedad de suavidad, pues tenemos un morfismo $E : C \to \widetilde{C}$ que restringido a $\widetilde{C}$ es la identidad.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema de estructura:
Demostración: (del Teorema 3.19) consideramos C una coálgebra coconmutativa suave, entonces Ω^1_C es C-inyectivo, como C además es local se sigue que todo inyectivo es libre, por lo tanto se está en las condiciones del Lema 3.20. Demostraremos el teorema por inducción en la dimensión de $(k.e \wedge k.e)/k.e$.

Supongamos que $(k.e \wedge k.e)/k.e = 0$. Como C es local, $C = \cup_{n>0} \wedge^n k.e$. Pero $\wedge^{n+1} k.e = k.e \wedge (\wedge^n k.e)$, y como $(k.e \wedge k.e)/k.e = 0$ se sigue $k.e \wedge k.e = k.e$ lo cual implica inductivamente que $\wedge^n k.e = k.e$, por lo tanto $C = k.e$

Supongamos que $\Omega^1_C \cong C^n$, de nuevo por el Lema 3.20 y el Teorema 3.21 tenemos que $C \cong \widetilde{C} \otimes sh(x)$, con $\widetilde{C}$ local y suave, entonces $\Omega^1_{\widetilde{C}} \cong \widetilde{C}^{(I)}$, donde $\#I = dim((k.e \wedge_{\widetilde{C}} k.e)/k.e)$. Es claro que $k.e \wedge_{\widetilde{C}} k.e \subseteq k.e \wedge_C k.e$ y ambos espacios contienen a e, luego $\#I \leq n$. Por otro lado, $e \otimes x \in k.e \wedge_C k.e$ pero $e \otimes x \notin k.e \wedge_{\widetilde{C}} k.e$, por lo tanto $\#I = r < n$. Por hipótesis inductiva se sigue que $\widetilde{C} \cong sh(x_1, \ldots, x_r)$ y en consecuencia $C \cong sh(x_1, \ldots, x_r, x)$. Notar que $\Omega^1_{sh(x_1,\ldots,x_r,x)} \cong sh(x_1, \ldots, x_r, x)^{r+1}$, por lo tanto $r = n - 1$ y $C \cong sh(x_1, \ldots, x_n)$ donde $n = dim_k((k.e \wedge_C k.e)/k.e)$.

Los elementos $k.x_1 \oplus \cdots \oplus k.x_n$ son exactamente los elementos primitivos de $sh(x_1, \ldots, x_n)$ y se tiene la identificación $sh(x_1, \ldots, x_n) = sh(Prim(sh(x_1, \ldots, x_n)))$, por lo tanto podemos caracterizar a C como $C \cong sh(Prim(C))$.

3.7. $Hoch^*$ y coálgebras suaves

Dada una coálgebra coconmutativa C, la relación entre las propiedades de $Hoch^*$ y la noción de suavidad es bastante estrecha, ya que $Hoch^*$ está relacionado con las coderivaciones como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 3.22. *Sea C una k-coálgebra coconmutativa arbitraria, entonces $Hoch^1(C) \cong \Omega^1_C$.*

Demostración: una vez definidos morfismos en los dos sentidos, la prueba de que uno es el inverso del otro es inmediata.

Recordamos que si C es coconmutativa, $Hoch^1(C) = Ker(b : C^{\otimes 2} \to C^{\otimes 3})$ ya que $0 = \Delta - \Delta^{op} = b : C \to C^{\otimes 2}$.

Sea $\gamma : C^{\otimes 2} \to C^{\otimes 2}$ definido por

$$x \otimes y \mapsto \Delta(x)\epsilon(y)$$

Por la coasociatividad, $\gamma|_{\Delta(C)} = 0$, por lo tanto γ define un morfismo del cociente $L_C = (C \otimes C)/\Delta(C)$, y restringiendo a los elementos simétricos de L_C se obtiene un morfismo, que también llamamos γ:

$$\gamma : \Omega^1_C \to C^{\otimes 2}$$

Veamos que $Im(\gamma) \subseteq Hoch^1(C)$:

Sea $\overline{x \otimes y} \in \Omega^1_C$ (suma sobre-entendida). Como Ω^1_C es cosimétrico, tenemos que

$$\overline{x_2 \otimes y} \otimes x_1 = \overline{x \otimes y_1} \otimes y_2$$

aplicando $\gamma \otimes id$ obtenemos que

$$(*) \qquad x_2 \otimes y \otimes x_1 - \epsilon(y) x_2 \otimes x_3 \otimes x_1 = x \otimes y_1 \otimes y_2 - x_1 \otimes x_2 \otimes y$$

Recordamos que el diferencial $b : C^{\otimes 2} \to C^{\otimes 3}$ está definido por

$$b(c \otimes d) = c_1 \otimes c_2 \otimes d - c \otimes d_1 \otimes d_2 + c_2 \otimes d \otimes c_1,$$

luego

$$b(x \otimes y - \epsilon(y)\Delta(x)) = x_1 \otimes x_2 \otimes y - x \otimes y_1 \otimes y_2 +$$
$$x_2 \otimes y \otimes x_1 - \epsilon(y)(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$$

Si utilizamos la ecuación $(*)$ podemos concluir fácilmente que $b(x \otimes y - \epsilon(y)\Delta(x)) = 0$ y por lo tanto $\gamma : \Omega^1_C \to Hoch^1(C)$.

Definimos ahora $\gamma' : Hoch^1(C) \to \Omega^1_C$ como

$$\gamma'(x \otimes y) := \overline{x \otimes y}$$

Lo único que hay que chequear es que $Im(\gamma') \subseteq \Omega^1_C$, lo cual es un cálculo similar al anterior. Sabiendo que γ y que γ' están bien definidas está claro que una es la inversa de la otra.

Sea C una coálgebra coconmutativa suave, supongamos que todas sus coálgebras simples son de dimensión uno (lo cual siempre es cierto si $k = \overline{k}$), entonces $C = \oplus_{i \in I} C_i$ donde I indexa el conjunto de subcoálgebras simples de C. Sabemos además que cada C_i es suave (y local) y llamemos e_i al único group-like de C_i. Si asumimos $dim_k(k.e_i \wedge_{C_i} k.e_i) = dim_k(k.e_i \wedge_C k.e_i) < \infty$ y $char(k) = 0$, entonces $C_i \cong sh(x_1, \dots x_{n_i}$ donde $n_i = dim_k((k.e_i \wedge_C$

$k.e_i)/k.e_i)$ y el cálculo de $Hoch^*(C_i)$ ya ha sido realizado, tenemos que $Hoch^r(C_i) = C_i^{\binom{n_i}{r}}$, en particular $Hoch^r(C_i) = 0\ \forall r >> 0$. Por otra parte, gracias al Corolario 5.7 del Teorema de escisión, sabemos que $Hoch^*(\oplus_{i\in I} C_i) = \oplus_{i\in I} Hoch^*(C_i)$, lo que concluye el cálculo de las coálgebras coconmutativas suaves (sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero, tales que para cada group-like e vale $dim_k(k.e \wedge k.e) < \infty$). Este cálculo puede ser considerado como la dualización del Teorema de Hochschild - Kostant - Rosenberg para álgebras que afirma que si A es una k-álgebra esencialmente de tipo finito (i.e. $A \cong S^{-1}B$ donde B es una k-algebra conmutativa de tipo finito) y k es un cuerpo perfecto, entonces A suave implica $HH_*(A) \cong \Omega^*(A)$.

Asumamos por el momento $char(k) = 0$ y $k = \overline{k}$. La condición de que para cada elemento tipo grupo e, $dim_k(k.e \wedge k.e) < \infty$ puede ser vista como el análogo a que un álgebra sea localmente finitamente generada. Si C es suave y sabemos que existe una cota para $\{dim_k(k.e \wedge k.e)\}_{e\in G(C)}$ en donde $G(C)$ denota los elementos de tipo grupo de C, tenemos que $Hoch^r(C) = 0$ para $r >> 0$. Hacemos la siguiente conjetura, cuyo interés radica en que provee de un teorema de estructura a partir de propiedades cohomológicas:

Conjetura 3.23. *Sea k un cuerpo de característica cero, C una k-coálgebra coconmutativa tal que existe $n > 0$ con $dim_k(S \wedge S) < n$ para toda subcoálgebra simple S. Entonces C es suave si y sólo si $Hoch^r(C) = 0 \forall r \geq n$.*

Notamos que la hipótesis de k algebraicamente cerrado no es esencial pues dada C una k-coálgebra, entonces $C' := C \otimes_k \overline{k}$ es una $\overline{k}$-coálgebra, y $Hoch^*(C'|\overline{k}) = Hoch^*(C|k) \otimes_k \overline{k}$.

4. Homología cíclica

Los resultados expuestos aquí han sido publicados en [F-S 99b].

La homología cíclica de álgebras sobre un anillo comutativo k es una herramienta poderosa en el estudio de álgebras, tanto 'topológicas' (anillos de funciones C^∞) como 'algebraicas geométricas' (anillos de coordenadas de variedades afines) o 'algebraicas aritméticas' (anillos de enteros de cuerpos numéricos, etc.) y en general, en cualquier aplicación que se relacione con la K-teoría, pues la homología cíclica viene siempre provista de un carácter de Chern. En el ejemplo de anillos de funciones (C^∞, funciones polinomiales) la homología cíclica recupera (en el caso suave) invariantes que tienen que ver con la topología más que con la geometría, más precisamente, si con la homología de Hochschild se recuperaban las formas diferenciales, con la homología cíclica se recupera la cohomología de De Rham. La homología cíclica contiene a su vez, diversas operaciones análogas a operaciones de la geometría diferencial, como la derivada de Lie y el diferencial exterior de De Rham dando lugar de esta manera a un 'cálculo diferencial no-conmutativo' para anillos cualesquiera, como por ejemplo anillos que sean productos cruzados, o subanillos de álgebras de operadores.

La motivación de contar con una homología cíclica para coálgebras viene del hecho de que las categorías de comódulos existen en abundancia. Sabemos, a partir del trabajo de Takeuchi [Tak 77a], que toda k-categoría abeliana de tipo finito (ver [Tak 77a]) es equivalente a la categoría de comódulos sobre una coálgebra (la coálgebra de coendomorfismos de cualquier objeto quasi-finito inyectivo co-generador). Encaramos la homología cíclica de coálgebras como una manera de definir invariantes categóricos calculables, y también esperando que de ésta manera se esté mas cerca de una definición de K-teoría para coálgebras, que aún no existe.

Comenzaremos entonces con la definición, y demostraremos sus propiedades fundamentales, a saber:

- Sucesión exacta larga que la relaciona con $Hoch^*$ (SBI)
- Invariancia Morita - Takeuchi.
- Un teorema de escisión a la Wodzicki.

Luego de dar la definición, comentaremos el ejemplo de la coálgebra tensorial TV, y luego el ejemplo de la coálgebra topológica $\mathcal{D}(X)$, en donde naturalmente recuperamos la cohomología de De Rham. Hacemos notar que el teorema original de De Rham queda expresado más naturalmente en estos nuevos términos, pues relaciona la cohomología de las corrientes (duales de las formas diferenciables, que se identifica con $Hoch^n(\mathcal{D}(X))$ con la cohomología singular (dual de la homología singular), en el lenguaje de coálgebras, el teorema de De Rham relaciona $Hoch^*(\mathcal{D}(X))$ con la homología singular, dos teorías que se definen en sí mismas, sin necesidad de dualización de una teoría previa.

4.1. Cohomología cíclica de coálgebras

De manera análoga a la homología cíclica de álgebras, definimos la homología cíclica de coálgebras a través de un complejo doble, damos a continuación la definición de los operadores que intervienen en ese complejo:

Definición 4.1. *Sea C una coálgebra topológica (incluimos a las coálgebras usuales poniéndole la topología discreta), y sean $c_1, \dots, c_n \in C$. Las siguientes fórmulas nos proveen morfismos bien definidos (después de extender por linealidad y continuidad):*

- *El morfismo cíclico $T : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n}$ definido por $T(c_1, \dots, c_n) := (c_2, \dots, c_n, c_1)$ y $t : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n}$, $t(c_1, \dots, c_n) := (-1)^{n+1}(c_2, \dots, c_n, c_1) = (-1)^{n+1}T(c_1, \dots, c_n)$.*
- *El diferencial de la resolución standard $b' : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n+1}$,*

$$b'(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(c_1, \dots, \Delta(c_i), \dots, c_n)$$

- *El diferencial del complejo que calcula $Hoch^*$, $b : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n+1}$,*

$$b(c_1, \dots, c_n) = b'(c_1, \dots, c_n) + (-1)^n T(\Delta(c_1), c_2, \dots, c_n)$$

- *La norma $N : C^{\otimes n} \to C^{\otimes n}$, $N(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i(c_1, \dots, c_n)$*

Enunciamos el siguiente lema, cuya primera parte dice en particular que el siguiente diagrama es un complejo doble:

$$\mathcal{C}^{**}(C) : \qquad \begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} \\
{} & C^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"] & C^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[u, "-b'"] & C^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"] \\
{} & C^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"] & C^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[u, "-b'"] & C^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"] \\
{} & C \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "b"] & C \arrow[l, equal] \arrow[u, "-b'"] & C \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "b"]
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{C}^{pq}(C) = C^{\otimes q+1}$ para $p, q \geq 0$, $(1-t) : \mathcal{C}^{p,2q} \to \mathcal{C}^{p,2q+1}$ y $N : \mathcal{C}^{p,2q+1} \to \mathcal{C}^{p,2q+2}$.

Lema 4.2. *Dada una k-coálgebra C:*

1. *Son ciertas las siguientes igualdades:*
   - $b^2 = 0$
   - $t^n_{C^{\otimes n}} = id$

- $(1-t)N = N(1-t) = 0$
- $(1-t)b = b'(1-t)$
- $Nb' = bN$

2. *Si $char(k) = 0$, las filas de $\mathcal{C}^{**}(C)$ son acíclicas, excepto eventualmente en grado cero, por lo tanto la homología del complejo total asociado al complejo doble $\mathcal{C}^{**}(C)$ es la homología del subcomplejo $(Ker((1-t) : \mathcal{C}^{*,0} \to \mathcal{C}^{*,1}), b)$.*

3. *Las columnas impares del bicomplejo (las que tienen a $-b'$ como diferencial) son acíclicas.*

Definición 4.3. *La cohomología de $Tot(\mathcal{C}^{**}(C))$ será denotada $HC^*(C)$ y será llamada la* **cohomología cíclica** *de la k-coálgebra C.*

4.2. Sucesión SBI

La aparición explícita en la definición de $HC^*(C)$ del complejo que calcula $Hoch^*(C)$ señala una estrecha relación entre las teorías $Hoch^*$ y HC^*, de hecho $HC^0(C) = Hoch^0(C)$. En general, para grados superiores se tiene la siguiente relación:

Proposición 4.4. *Existe una sucesión exacta larga del tipo SBI:*

$$\cdots \to HC^n(C) \to^S HC^{n+2}(C) \to^I Hoch^{n+2}(C) \to^B HC^{n+1}(C) \to \ldots$$

La demostración consiste en considerar la sucesión exacta corta de complejos dobles

$$(*)\ \ 0 \to \widetilde{\mathcal{C}}^{**}(C) \to \mathcal{C}^{**}(C) \to Coker^{**} \to 0$$

donde $\widetilde{\mathcal{C}}^{**}(C)$ es el subcomplejo cuyas dos primeras columnas son nulas:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \\
{} & C^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \\
{} & C^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \\
{} & C \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "b"] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto $Coker^{**}$ es:

$$\begin{tikzcd}
 & \\
C^{\otimes 3} \arrow[u, "-b'"] & C^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"'] \\
C^{\otimes 2} \arrow[u, "-b'"] & C^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[u, "b"'] \\
C \arrow[u, "-b'"] & C \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd}$$

Esta sucesión exacta corta induce una sucesión exacta larga en cohomología y luego utilizamos el hecho de que la columna con diferencial $-b'$ es acíclica, y por lo tanto podemos usar el Lema de eliminación de complejos acíclicos (ver [Lo 92]), que asegura que la cohomología del complejo $Coker^{**}$ es $Hoch^*(C)$.

Observaciones:

1. Si consideramos coálgebras que no sean necesariamente counitarias (es decir, $(C, \Delta : C \to C \otimes C)$, pero sin $\epsilon : C \to k$) y definimos la cohomología cíclica como la cohomología del complejo doble anterior $Tot(\mathcal{C}^{**}(C))$, vemos que la teoría intermedia que reemplazaría a $Hoch^*$ en la proposición anterior es la cohomología del complejo total asociado al complejo doble con las dos columnas, la que tiene el diferencial b y la del $-b'$, que no tiene por qué coincidir con $Hoch^*$ porque en este caso el complejo formado por la columna 1 no es necesariamente acíclico. Veremos más adelante que esa es naturalmente la buena definición de $Hoch^*$ en el caso no counitario.

2. Como estamos considerando coálgebras counitarias, el diferencial b' es acíclico, se puede usar el Lema de eliminación de complejos acíclicos, y definir entonces de manera equivalente la cohomología cíclica a través de un complejo doble triangular. En los ejemplos TV y $\mathcal{D}(X)$ usaremos la versión 'triangular'; de cualquier manera, preferimos esta definición 'cuadrada' porque es la definición adecuada tanto para el caso counitario como para el no-counitario.

4.3. El ejemplo TV

Aquí calcularemos $HC^*(TV)$ donde V es un k-espacio vectorial cualquiera, la estructura de coálgebra de $TV = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} V^{\otimes n}$ está dada por

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1, \ldots, v_i) \otimes (v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

donde $v_i \in V,\ i = 1, ..., n$, y por convención $v_0 = v_{n+1} = 1$. La counidad está definida por $\epsilon(v_1, \ldots, v_n) = 0$ si $n \geq 1$ y $\epsilon|_k = id_k$.

Recordamos que gracias a una resolución pequeña de TV como $(TV)^e$-comódulo, el Corolario 2.4 y 2.5 (Corolario 2.9 y 2.10 de [F-S 98a]) nos dice que $Hoch^*(TV)$ puede ser calculada como:

Para $n \neq 0, 1$ y para cualquier TV-bicomódulo M:

$$(1)\ \ H^n(M, TV) = Hoch^n(M, TV) = 0$$

y si $dim_k(V) \geq 2$ (incluso podría ser $dim_k(V) = \infty$):

$$(2)\ \ Hoch^0(TV, TV) = TV^\sigma$$

$$(3)\ \ Hoch^1(TV, TV) = TV_\sigma$$

donde si $(V^{\otimes n})^\sigma$ es el espacio de invariantes de $V^{\otimes n}$ bajo la acción de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (el generador σ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ actúa en $V^{\otimes n}$ bajo la fórmula $\sigma(v_1 \ldots v_n) = v_n v_1 \ldots v_{n-1}$) entonces $TV^\sigma = \bigoplus_{n \geq 0} (V^{\otimes n})^\sigma$. De manera análoga denotamos TV_σ a los coinvariantes.

El cálculo de $HC^*(TV)$ se basa en construir un complejo $\mathcal{S}^{**}(TV)$ cambiando las columnas del complejo triangular por el complejo anterior más sencillo que calcula $Hoch^*$, y cuyo complejo total calcula $HC^*(C)$:

$$\mathcal{S}^{**}(TV) = \begin{tikzcd} \arrow[u] & \arrow[u] & \arrow[u] \\ TV \arrow[u] & V \otimes TV \arrow[l, "P"'] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] \\ & TV \arrow[u, "1-\sigma"] & V \otimes TV \arrow[l, "P"'] \arrow[u] \\ & & TV \arrow[u, "1-\sigma"] \end{tikzcd}$$

donde $P(v \otimes (w_1, \ldots, w_n)) =$

$$= (v, w_1, \ldots, w_n) + (w_n, v, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$$

$$+(w_{n-1}, w_n, v, w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}) + \cdots + (w_1, \ldots, w_n, v)$$

Observación: la cohomología de la columna n-ésima de este complejo es $Hoch^*(TV)[n]$, por lo tanto, en caso de haber un morfismo de complejos dobles entre este complejo y el complejo $\mathcal{B}_{**}(TV)$ (que calcula HC^*) que induzca un isomorfismo en la cohomología de las columnas, el morfismo es necesariamente un quasi-isomorfismo.

Lema 4.5. *Existe un morfismo de bicomplejos $\mathcal{S}^{**}(TV) \to \mathcal{B}^{**}(TV)$ que induce un isomorfismo en la cohomología de las columnas.*

Demostración: exhibiremos aquí el morfismo sin demostrar que cumple con lo pedido, para la demostración completa ver [F-S 99b].

Consideremos

$$id : TV \to TV$$

y

$$j : V \otimes TV \to TV \otimes TV$$

$$v \otimes (w_1, \ldots, w_n) \mapsto 1 \otimes P(v \otimes w_1, \ldots, w_n)$$

El morfismo $\mathcal{S}^{**}(TV) \to \mathcal{B}^{**}(TV)$ inducido por (id, j) es el morfismo de bicomplejos deseado.

Proposición 4.6. *Con las notaciones anteriores:*

1. $HC^0(TV) = Hoch^0(TV) = TV^\sigma$
2. $HC^{2n}(TV) = TV^\sigma / P(TV)$, *si* $n \geq 1$.
3. $HC^{2n+1}(TV) = Ker(P)/Im(1-\sigma)$

O, más compactamente:

$$\forall n \geq 0 \qquad HC^n(TV) = \bigoplus_{k \geq 0} H_n(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, V^{\otimes k})$$

por lo tanto en característica cero, $HC^n(TV) = 0$ *para todo* $n \geq 1$.

4.4. El ejemplo $\mathcal{D}(X)$

Mostraremos aquí cómo es que se recupera la cohomología de De Rham de una variedad compacta X a partir de la cohomología cíclica de $\mathcal{D}(X)$. Compararemos primero el diferencial que proviene de la sucesión SBI con el diferencial exterior de De Rham.

Observación: La composición $I \circ B$ induce un morfismo $I \circ B : Hoch^{n+1}(C) \to Hoch^n(C)$ de cuadrado cero. Si $C = A'$, $I \circ B$ corresponde a la traspuesta de $\widetilde{B} \circ \widetilde{I} : HH_n(A) \to HH_{n+1}(A)$ (donde $\widetilde{B}$ y $\widetilde{I}$ denotan los morfismos correspondientes a la sucesión SBI para las álgebras). Si además A es tal que $HH_n(A) = \Omega^n(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ejemplo cuando X es una variedad diferenciable compacta y $A = C^\infty(X)$) entonces $\widetilde{B} \circ \widetilde{I} = d : \Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$ es el diferencial de De Rham. Puesto que en el caso $C = A'$ vale la igualdad $Hoch^n(C) \cong \Omega^n_C$, y como $\Omega^n_C = \Omega^n(A)'$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hoch^{n+1}(C) \arrow[r, "I \circ B"] \arrow[d, equal, "\sim"'] & Hoch^n(C) \arrow[d, equal, "\sim"'] \\
\Omega^{n+1}_C \arrow[r, "d^*"] & \Omega^n_C
\end{tikzcd}$$

donde d^* denota el morfismo correspondiente a d.

Para describir $HC^*(C)$ en términos de $H^*_{DR}(X; k)$ consideramos los siguientes morfismos entre los bicomplejos $\mathcal{B}^{**}(C)$ y $\mathcal{B}^{**}(\Omega_C)$:

$$\mathcal{B}^{**}(C) \qquad\qquad\qquad \mathcal{B}^{**}(\Omega_C)$$

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} & & {} & {} & {} \\
C \arrow[u, "b"] & C^{\otimes 2} \arrow[l, "B"] \arrow[u, "b"] & C^{\otimes 3} \arrow[l, "B"] \arrow[u, "b"] & & C \arrow[u, "0"] & \Omega^1_C \arrow[l, "d^*"] \arrow[u, "0"] & \Omega^2_C \arrow[l, "d^*"] \arrow[u, "0"] \\
& C \arrow[u, "b"] & C^{\otimes 2} \arrow[l, "B"] \arrow[u, "b"] & \underset{\pi'}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} & & C \arrow[u, "0"] & \Omega^1_C \arrow[l, "d^*"] \arrow[u, "0"] \\
& & C \arrow[u, "b"] & & & & C \arrow[u, "0"]
\end{tikzcd}$$

donde $\Omega^n_C = \Omega^n(A)'$, $C^{\otimes n} = (A^{\otimes n})'$, $b = (b_A)^*$, $B = (B_A)^*$ y π y π' son respectivamente los morfismos traspuestos a los morfismos definidos por:

$$A^{\otimes n+1} \to \Omega^n(A)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \frac{1}{n!} a_0 d(a_1) \wedge \cdots \wedge d(a_n)$$

y

$$\Omega^n(A) \to A^{\otimes n+1}$$

$$a_0 d(a_1) \wedge \cdots \wedge d(a_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(a_0, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$$

La columna de la derecha de ambos complejos calcula $Hoch^*(C)$, por lo tanto, tomando $\mathcal{B}_{\leq n}(C)$ y $\mathcal{B}_{\leq n}(\Omega_C)$ como los bicomplejos que consisten en las primeras n columnas de $\mathcal{B}^{**}(C)$ y $\mathcal{B}^{**}(\Omega_C)$ respectivamente, se tiene una sucesión exacta corta de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{B}}_{\leq n+1}(C) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\widetilde{\pi}'_{n+1}"'] & \mathcal{B}_{\leq n+1}(C) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\pi'_n"'] & \mathcal{C}^{*,0}(C) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\pi'_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{B}}_{\leq n+1}(\Omega_C) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\widetilde{\pi}_{n+1}"'] & \mathcal{B}_{\leq n+1}(\Omega_C) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\pi_n"'] & \mathcal{C}^{*,0}(\Omega_C) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\pi_0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\mathcal{B}}_{\leq n+1}$ denota al subcomplejo de $\mathcal{B}_{\leq n+1}$ con ceros en la columna de la derecha. Si inductivamente suponemos que $\widetilde{\mathcal{B}}_{\leq n+1}(C)$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_{\leq n+1}(\Omega_C)$ son quasi-isomorfos, como $\mathcal{C}^{*,0}(C)$ y $\mathcal{C}^{*,0}(\Omega_C)$ son quasi-isomorfos, entonces, por el Lema de los cinco, $\mathcal{B}_{\leq n+1}(C)$ y $\mathcal{B}_{\leq n+1}(\Omega_C)$ resultan también quasi-isomorfos. Como la cohomología del complejo total coincide con el límite inverso de las sohomologías de estos complejos, hemos demostrado que $\mathcal{B}^{**}(C)$ y $\mathcal{B}^{**}(\Omega_C)$ son quasi-isomorfos.

Observación: En este ejemplo también hemos utilizado el Lema de eliminación de complejos acíclicos para así usar $Tot(\mathcal{B}^{**}(C))$ en vez de $Tot(\mathcal{C}^{**}(C))$ en el cálculo de $HC^*(C)$.

Como consecuencia de que $\mathcal{B}^{**}(C)$ y $\mathcal{B}^{**}(\Omega_C)$ sean quasi-isomorfos se tiene que $HC^n(C) = Ker(d^*_n) \oplus H_{n-2}(\Omega^*_C) \oplus H_{n-4}(\Omega^*_C) \oplus \dots$. Los grupos $H_n(\Omega^*_C) = H_n((\Omega^*(A)')$ fueron descriptos por De Rham en su trabajo *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples* [DeR], como la homología singular (con coeficientes reales o complejos) de la variedad X. Notamos aquí que en el artículo original de De Rham, el interés estaba en la cohomología de $\Omega^*(X)'$ (las corrientes) y no en $\Omega^*(X)$ (las formas diferenciales).

Más allá del teorema de De Rham, notamos que los morfismos explícitos entre $(H_n(\Omega^*_C))'$ y $H_n(\Omega^*(A))$ pueden ser obtenidos de la manera siguiente:

$$\nu : H^n(\Omega^*(A)) \to (H_n(\Omega^*_C))'$$

$$[\omega] \mapsto ([\phi] \mapsto \phi(\omega))$$

y

$$\gamma : H_n(\Omega_C^*) \to (H^n(\Omega^*(A)))'$$
$$[x] \mapsto ([\omega] \mapsto x(\omega))$$

Podemos demostrar la suryectividad de ν de manera elemental: Dada $\omega : H_n(\Omega_C^*) \to \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-lineal y continua, como $H_n(\Omega_C^*) = Ker(d_n^*)/Im(d_{n-1}^*)$, considerando $\omega \circ \pi : Ker(d_n^*) \to \mathbb{C}$ (donde π es la proyección al cociente), $\omega \circ \pi$ se anula sobre $Im(d_{n-1}^*)$. Como $Ker(d_n^*)$ es un subespacio cerrado de Ω_C^n, el teorema de Hahn-Banach nos asegura que existe una extensión lineal y continua de ω que llamaremos $\widetilde{\omega} : \Omega_C^n \to \mathbb{C}$. Se tiene $\widetilde{\omega} \in (\Omega_C^n)' = \Omega^n(A)'' = \Omega^n(A)$. Por otro lado, el elemento $\widetilde{\omega}$ es un cociclo de De Rham puesto que $d(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega} \circ d^* = \widetilde{\omega}|_{Ker(d^*)} \circ d^* = \omega \circ \pi \circ d^* = 0$. A su vez, $[\widetilde{\omega}]$ se mapea en ω porque $[\widetilde{\omega}]([\phi]) = \phi(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}(\phi) = (\omega \circ \pi)(\phi) = \omega([\phi])$ (donde la tercera igualdad es válida porque $\phi \in Ker(d_n^*)$).

Veamos también que γ es sobreyectiva:

Dado $z : H^n(\Omega^*(A)) \to \mathbb{C}$, si p es la proyección $Ker(d_n) \to H^n(\Omega^*(A))$ entonces $z \circ p : Ker(d_n) \to \mathbb{C}$. Nuevamente por el teorema de Hahn-Banach, $z \circ p$ se extiende a $\widetilde{z} : \Omega^n(A) \to \mathbb{C}$, $\widetilde{z} \in (\Omega^n(A))' = \Omega_C^n$. Falta ver que $\widetilde{z}$ es un cociclo que se mapea en z:

$$d^*(\widetilde{z}) = \widetilde{z} \circ d = \widetilde{z}|_{Ker(d)} \circ d = z \circ p \circ d = 0$$

y

$$[\widetilde{z}] \mapsto ([\omega] \mapsto \widetilde{z}(\omega) = z(p(\omega)) = z([\omega]))$$

Como γ es sobreyectiva, el morfismo traspuesto γ' es inyectivo. Tenemos

$$\begin{tikzcd} H^n(\Omega^*(A))'' \arrow[r, "\gamma'"] & H_n(\Omega_C^*)' \\ H^n(\Omega^*(A)) \arrow[u, "j_A"] \arrow[ur, "\nu"] & \end{tikzcd}$$

luego γ' es sobreyectivo, ya que ν lo es. Notar que el teorema de De Rham implica que $H^n(\Omega^*(A)) \equiv H_{DR}^n(X)$ es un espacio Hausdorff, lo que equivale a la inyectividad de j_A, y por lo tanto ν es un isomorfismo.

Podemos obtener resultados particulares sin utilizar el teorema de De Rham: es claro que $\Omega^n(A)$ es un espacio Hausdorff ya que es un sumando directo de A^r para algún $r \in \mathbb{N}$ ($\Omega^n(A)$ es A-proyectivo de tipo finito) y por lo tanto $HH_n(A) = \Omega^n(A)$ es Hausdorff. Como $HC_0(A) = HH_0(A) = A$, se tiene que $HC_0(A)$ es Hausdorff. También $HC^1(C)$ es el núcleo de un morfismo entre dos espacios Hausdorff, por lo tanto $HC^1(C)$ es Hausdorff. Lo mismo sucede para $HC_1(A)$ y en consecuencia para $H_{DR}^1(X)$ ya que este último es un subespacio del anterior.

Por la sucesión SBI para álgebras, se tiene un morfismo sobreyectivo $HH_1(A) \to HC_1(A)$, y por lo tanto una inyección $(HC_1(A))' \to (HH_1(A))'$ que es una inmersión ya que $HC_1(A)$ tiene la topología cociente de $HH_1(A)$. Tenemos entonces un epimorfismo $HH_1(A) = HH_1(A)'' \to HC_1(A)''$. Por otro lado, considerando el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
HC_0(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & HH_1(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & HC_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \arrow[d, equal] \\
HC_0(A)'' \arrow[r] & HH_1(A)'' \arrow[r] & HC_1(A)'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La fila de arriba es siempre exacta, la de abajo es exacta en $HC_1(A)''$. Por el Lema de los cinco, j es un isomorfismo algebraico, en particular es inyectivo, luego $HC_1(A)$ is Hausdorff. Notamos también que $(\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A))' = Ker(d_n^*)$. Entonces $HC^n(C) = (\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A))' \oplus (\oplus_{i\geq 1}) H^{DR}_{n-2i}(C))$ (esta expresión es igual a $(HC_n(A))'$ cuando $H^n(\Omega^*(A))$ es Hausdorff).

El morfismo S es fácilmente descriptible:

$$\begin{tikzcd}
S : HC^n(C) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & HC^{n+2}(C) \arrow[d, equal] \\
Ker(d_n^*) \oplus \bigoplus_{0<i\leq[\frac{n}{2}]} H^{DR}_{n-2i}(C) & & Ker(d_{n+2}^*) \oplus \bigoplus_{0<i\leq[\frac{n+2}{2}]} H^{DR}_{n-2i}(C)
\end{tikzcd}$$

Bajo esta identificación, el morfismo S es la proyección $Ker(\Omega_C^{n+1} \to \Omega_C^n) \to H_n^{DR}(X)$ en la primera coordenada, y la identidad de $H^{DR}_{n-2k}(X)$ en las otras coordenadas.

Para $n = 1$, $HC^1(C) = HC_1(A)'$. En caso de que X sea una variedad orientable de dimensión r, fijando un elemento de volumen se tiene la dualidad $* : \Omega^k(X) \to \Omega^{r-k}(X)$. En este caso $H^{r-1}_{DR}(X)$ también es Hausdorff, y podemos utilizar la homología de las corrientes para hacer descripciones del siguiente tipo:

Supongamos que el operador $\nabla^2 = *d*d : A \to A$ es sobreyectivo (por ejemplo cuando $X \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con $\partial(X)$ suave) y sea $\omega \in \Omega^1(X)$. Si consideramos la ecuación

$$(d(\omega^*))^* = \nabla^2(f)$$

como ∇^2 es sobreyectivo, esta ecuación tiene una solución $\widetilde{f}$, entonces $d(\omega^*) = d((d\widetilde{f})^*)$. Si $H^1_{DR}(X) = 0$, entonces existe $\eta \in \Omega^{n-2}(X)$ tal que $d\eta = \omega^* - (d\widetilde{f})^*$, aplicamos entonces $*$, que es involutivo, obteniendo $\omega = (d\eta)^* + d\widetilde{f}$. Estos argumentos son suficientes, en el caso de tener una variedad Riemanniana de dimensión 3, para decir que todo campo de vectores se puede escribir como un gradiente más un rotor (después de identificar a los campos con las 1-formas utilizando la dualidad $\Omega^2(X) \cong \Omega^1(X)$).

En el caso de las corrientes, como $H_1(\Omega_C^*) = (H^1_{DR}(X))'$, el primer espacio es nulo si y sólo si el segundo lo es (puesto que $H^1_{DR}(X)$ es Hausdorff). Una vez identificado el diferencial d_{coalg} del complejo Ω_C^* con el diferencial $(* \circ d_{DR})'$, los argumentos del párrafo anterior pueden repetirse, ya que $C = A'$ y los morfismos $I,\ B,\ S$ son los traspuestos de los morfismos $\widetilde{I},\ \widetilde{B},\ \widetilde{S}$ que relacionan $HC_*(A)$ y $HH_*(A)$.

4.5. Invariancia Morita - Takeuchi

Una de las propiedades mas importantes de $Hoch^*$ y H^* es que son invariantes por equivalencias Morita - Takeuchi, en esta sección demostraremos lo mismo para HC^*. Hacemos notar que para el caso de álgebras, la invariancia Morita de la homología y cohomología de Hochschild fue demostrada por Dennis - Igusa [D-I 82]. Esta demostración daba un morfismo de traza para el caso particular de tener las álgebras A y $M_n(A)$. En el caso genérico de dos álgebras Morita - equivalentes A y B, se sabía que $HH_*(A) \cong HH_*(B)$ y que $HH^*(A) \cong HH^*(B)$, pero no se contaba con un morfismo explícito. La demostración de la invariancia de HC_* para el caso de álgebras fue hecha independientemente por C. Kassel [Ka 88] y McCarthy [McC 88]. McCarthy no demuestra la invariancia de HC_* en forma directa sino utilizando la sucesión SBI y el hecho de la invariancia Morita de H_*. Para ésto se necesita un isomorfismo explícito entre $HH_*(A)$ y $HH_*(B)$ y otro morfismo explícito entre $HC_*(A)$ y $HC_*(B)$, que sean naturales con respecto a la sucesión SBI. La demostración de Kassel es más abstracta, utiliza la cohomología cíclica bivariante y muestra que el funtor de la categoría de k-álgebras asociativas y morfismos de álgebras en k-módulos dada por la homología cíclica se factoriza por la categoría cuyos objetos son k-álgebras asociativas pero cuyos morfismos son, dadas dos k-álgebras A y B, las clases de isomorfismo de A-B-bimódulos B-proyectivos de tipo finito. La equivalencia Morita induce entonces una HC-equivalencia, es decir que se tienen elementos en $HC^0(A,B)$ y $HC^0(B,A)$, uno el inverso del otro, y esto implica el isomorfismo entre $HC^*(A)$ y $HC^*(B)$. La demostración que daremos nosotros sigue las ideas de McCarthy en el sentido que utiliza la sucesión SBI, sin embargo, el morfismo de McCarthy es un tanto complicado, y no es fácilmente dualizable. La exposición que daremos aquí es un poco diferente a la que figura en la literatura ([F-S 99b]), la idea que permite una simplificación sustancial en la exposición (y que puede ser utilizada también para álgebras) es el siguiente lema, junto a una coálgebra intermedia adecuada construida a partir de dos coálgebras equivalentes Morita - Takeuchi:

Lema 4.7. *Sean C y D dos coálgebras tales que existe un morfismo $f : C \to D$ que respeta la comultiplicación pero no necesariamente la counidad (i.e. $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$). Supongamos además que este morfismo f induce un isomorfismo $f^* : Hoch^*(C) \to Hoch^*(D)$, entonces f induce un isomorfismo $f^* : HC^*(C) \to HC^*(D)$*

Demostración: Es claro que las definiciones de los complejos standard que calculan $Hoch^*$ y HC^* no hacen uso de la counidad, sólo hacen uso de la comultiplicación Δ, por lo tanto es claro que todo morfismo comultiplicativo induce un morfismo entre los complejos que calculan $Hoch^*$ y HC^*, y por lo tanto induce morfismos entre $f^* : Hoch^*(C) \to Hoch^*(D)$ y $f^* : HC^*(C) \to HC^*(D)$. También es claro que f induce un morfismo entre las sucesiones exactas cortas de la demostración de SBI asociadas a C y a D, luego, dadas las hipótesis $f^* : Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$, el lema es consecuencia usar el lema de los cinco en la sucesión SBI.

Lema 4.8. *Sean C y D dos coálgebras (algebraicas) equivalentes Morita - Takeuchi. Entonces* *existe una coálgebra E y dos morfismos comultiplicativos (pero no necesariamente counitarios)*

$$f : E \to C \quad y \quad g : E \to D$$

tales que f y g inducen isomorfismos en $Hoch^*$

Demostración: Exhibiremos la coálgebra E y los morfismos, la demostración de que cumplen con lo requerido se encuentra en [F-S 99b].

Como C y D son equivalentes Morita - Takeuchi, sabemos que la equivalencia entre las categorías de C-comódulos y D-comódulos está dada por $P\square_C-$ donde P es quasi-finito e inyectivo (tanto mirado como C-comódulo, como mirado como D-comódulo), y que $D \cong e_C(P)$. Tomamos $E := e_C(C \oplus P)$.

El morfismo entre E y C está dado por la proyección

$$E = e_C(C \oplus P) \cong h_C(C, C) \oplus h_C(C, P) \oplus h_C(P, C) \oplus h_C(P, P) \to h_C(C, C) \cong C$$

y el morfismo entre E y D está dado por la otra proyección:

$$E = e_C(C \oplus P) \cong h_C(C, C) \oplus h_C(C, P) \oplus h_C(P, C) \oplus h_C(P, P) \to h_C(P, P) \cong D$$

Utilizando la coálgebra intermedia que nos provee este lema, más el lema anterior, obtenemos como corolario el teorema de invariancia:

Teorema 4.9. *Sean C y D dos coálgebras (algebraicas) que son equivalentes Morita - Takeuchi, entonces $HC^*(C) \cong HC^*(D)$.*

5. De las coálgebras no counitarias y de un teorema de escisión a la Wodzicki para $Hoch^*$ y HC^*

5.1. Coálgebras no counitarias

En esta sección consideraremos coálgebras que no son necesariamente counitarias, es decir, espacios vectoriales C junto con un morfismo coasociativo $\Delta : C \to C \otimes C$, y no requeriremos que exista $\epsilon \in C^*$ tal que $(\epsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \epsilon)\Delta = id$. Contar con una teoría no-counitaria permite aplicaciones a situaciones en donde hay morfismos comultiplicativos (eventualmente entre coálgebras counitarias) pero que no verifican necesariamente $f\epsilon = \epsilon$.

Observamos que los complejos $(C^{\otimes *}, b')$, $(C^{\otimes *}, b)$ y $\mathcal{C}^{**}(C)$ tienen sentido en el caso no counitario ya que sólo utilizan el morfismo Δ como dato.

Veamos primero que, como en el caso de álgebras, el funtor olvido, de la categoría de coálgebras counitarias en la categoría de coálgebras no counitarias admite un adjunto, en particular, dada una coálgebra C, existirá una coálgebra $\widetilde{C}$ más grande y un morfismo de coálgebras $\widetilde{C} \to C$, universal con respecto a todos los morfismos de coálgebras con dominio una coálgebra counitaria. Definamos entonces $\widetilde{C}$:

Sea $\widetilde{C} := C \oplus k$ como espacio vectorial, identificando $\widetilde{C} \otimes \widetilde{C} = (C \oplus k) \otimes (C \oplus k)$ con $(C \otimes C) \oplus C \oplus C \oplus k$, definimos el coproducto por:

$$\Delta_{\widetilde{C}} : \widetilde{C} \to \widetilde{C} \otimes \widetilde{C}$$

$$(c, \lambda) \mapsto (\Delta_C(c), c, c, \lambda)$$

Se verifica fácilmente que $\Delta_{\widetilde{C}}$ es coasociativo, y que tiene counidad

$$\epsilon : \widetilde{C} \to k$$

$$(c, \lambda) \mapsto \lambda$$

Se verifica también que la proyección $\widetilde{C} \to C$ ($(c, \lambda) \mapsto c$) es un morfismo comultiplicativo.

Es claro que la asignación $C \mapsto \widetilde{C}$ es funtorial. Si además D es una coálgebra con counidad y $f : D \to C$ es un morfismo comultiplicativo, existe una única manera de definir un morfismo counitario $f' : D \to \widetilde{C}$ de tal manera que la composición $D \to \widetilde{C} \to C$ sea igual a f, pues al pedirle esto último más la counitariedad, la única opción es definir $f'(d) := (f(d), \epsilon(d))$. También es claro que si $g : D \to \widetilde{C}$ es un morfismo de coálgebras counitarias, entonces la composición $D \to \widetilde{C} \to C$ es un morfismo comultiplicativo entre D y C, y estas dos construcciones son recíprocas, es decir:

$$Hom_{\text{Coalg-counit}}(D, \widetilde{C}) = Hom_{\text{Coalg-nocounit}}(D, C)$$

para toda coálgebra counitaria D.

Para una coálgebra no necesariamente counitaria C y un bicomódulo no necesariamente counitario M se definen las siguientes teorías de cohomología:

$$Hoch^*_{bar}(M, C) := H^*(M \otimes C^{\otimes *}, b')$$

$$Hoch^*_{naive}(M, C) := H^*(M \otimes C^{\otimes *}, b)$$

$$Hoch^*(C) := H^* \Big(Coker((k^{\otimes *}, b) \to (\widetilde{C}^{\otimes *}, b)) \Big)$$

donde por bicomódulo no necesariamente counitario entendemos un espacio vectorial M provisto de dos morfismos coasociativos $\rho^- : M \to C \otimes M$ y $\rho^+ : M \to M \otimes C$. Si $M = C$, $Hoch^*_{bar}(M, C)$ se denotará $Hoch^*_{bar}(C)$, idem para $Hoch^*_{naive}$.

Con el objetivo de poder sustituir algunos de los complejos de la definición anterior por otros más convenientes en la demostración del teorema principal de esta sección, demostraremos el siguiente lema, que es el análogo -en el contexto de coálgebras- al del cambio de la resolución standard por la resolución normalizada.

Lema 5.1. *Sea (D, Δ, ϵ) una coálgebra counitaria y denotemos con $\overline{D} \subset D$ al núcleo de $\epsilon : D \to k$. Entonces*

1. $(D \otimes \overline{D}^{\otimes *}, b)$ *es un subcomplejo de* $(D \otimes D^{\otimes *}, b)$.

2. *La inclusión de complejos* $(D \otimes \overline{D}^{\otimes *}, b) \to (D \otimes D^{\otimes *}, b)$ *induce un isomorfismo en homología.*

Demostración: ver que $(D \otimes \overline{D}^{\otimes *}, b)$ es un subcomplejo es un cálculo directo, demostremos que la inclusión es un quasi-isomorfismo.

La prueba es por inducción en el grado, usando una composición iterada de inclusiones, cada una de la cual es un quasi-isomorfismo. Más precisamente, dado $p \geq 1$, consideramos la inclusión del complejo de la primera fila en el de la segunda:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D \otimes \overline{D} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "b"] & D \otimes \overline{D}^{\otimes p} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D \otimes \overline{D}^{\otimes p+1} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D^{\otimes 2} \otimes \overline{D}^{\otimes p+1} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \cdots \\
D \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D \otimes \overline{D} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "b"] & D \otimes \overline{D}^{\otimes p} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D^{\otimes 2} \otimes \overline{D}^{\otimes p} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & D^{\otimes 3} \otimes \overline{D}^{\otimes p} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 \arrow[r] & D \otimes k \otimes \overline{D}^{\otimes p} \arrow[r, "\overline{b}"] & D^{\otimes 2} \otimes k \otimes \overline{D}^{\otimes p} \arrow[r, "\overline{b}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

en donde también hemos escrito el conúcleo. Ahora calcularemos el diferencial inducido en el conúcleo. Sea $(d_1, \ldots, d_r, 1, c_1, \ldots, c_p)$ be an element of $D^{\otimes r} \otimes k \otimes \overline{D}^{\otimes p}$ y sea $x \in D$ un elemento de D tal que $\epsilon(x) = 1$, entonces

$$\overline{b}(d_1, \ldots, d_r, 1, c_1, \ldots, c_p) = (id^{\otimes r+1} \otimes \epsilon \otimes id^{\otimes p})(b(d_1, \ldots, d_r, x, c_1, \ldots, c_p)) =$$

$$= b'(d_1, \ldots, d_r) \otimes 1 \otimes c_1 \otimes \ldots \otimes c_p$$

Esto prueba que el conúcleo es acíclico (pues para una coálgebra counitaria, el complejo $(D^{\otimes *}, b')$ tiene $\epsilon \otimes id$ como homotopía de contracción) y por lo tanto la inclusión es un quasi-isomorfismo. Si denotamos por F_p al subcomplejo de la primera fila del diagrama, tenemos una sucesión de inclusiones $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset (D \otimes D^{\otimes *}, b)$. Si queremos calcular la cohomología del complejo $D \otimes \overline{D}^{\otimes *}$ en grado n, basta calcular la cohomología de F_{n+1} en ese grado, y lo que hemos probado es que este complejo es quasi-isomorfo al complejo original $(D \otimes D^{\otimes *}, b)$.

Corolario 5.2. *Con la definición de esta sección de $Hoch^*(C)$, estos grupos de cohomología pueden ser calculados como la cohomología del complejo total asociado al siguiente complejo doble:*

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{b} & C^{\otimes 2} & \xrightarrow{b} & C^{\otimes 2} & \xrightarrow{b} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle 0=1-t} & & \downarrow{\scriptstyle 1-t} & & \downarrow{\scriptstyle 1-t} & & \\ C & \xrightarrow{b'} & C^{\otimes 2} & \xrightarrow{b'} & C^{\otimes 2} & \xrightarrow{b'} & \cdots \end{array}$$

Demostración: Delinearemos la idea general, para los detalles, ver [F-S 99b].

Observamos primero que $\overline{\widetilde{C}} = C$ y $\overline{k} = 0$. Como $Hoch^*(C) = H^*(Coker((k^{\otimes *}, b) \to (\widetilde{C}^{\otimes *}, b)))$ el resultado se sigue de hacer el cálculo de este conúcleo utilizando las resoluciones reducidas. Notar que si C es una coálgebra counitaria, este corolario muestra también que las dos posibles definiciones de $Hoch^*(C)$ (viendo a C como coálgebra counitaria, u olvidando la counidad de C y viendo a C como no counitaria) coinciden, pues para C counitaria $(C^{\otimes *}, b')$ es acíclico.

5.2. Coálgebras H-counitarias

Observaciones: 1. El complejo doble del Corolario anterior es exactamente el mismo complejo doble que aparece en la demostración de la sucesión SBI.
2. Este complejo doble es el cono del morfismo $1 - t : (C^{\otimes *}, b) \to (C^{\otimes *}, b')$ (corrido en un grado). Este hecho implica que hay una sucesión exacta larga relacionando las tres teorías tipo $Hoch$ definidas anteriormente, más precisamente hay una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow Hoch^{n+1}_{bar}(C) \longrightarrow Hoch^n(C) \longrightarrow Hoch^n_{naive}(C) \xrightarrow{1-t} Hoch^n_{bar}(C) \longrightarrow \cdots$$

3. La definición de $Hoch^*$ que dimos en esta sección es un caso particular de la definición de una teoría relativa asociada al morfismo suryectivo $\widetilde{C} \to C$. Para extensiones generales damos la siguiente definición:

Definición 5.3. *Diremos que una coálgebra C (no necesariamente counitaria)* **satisface escisión** *para $Hoch^*_{naive}$, si y sólo si para cualquier sucesión exacta corta de coálgebras (no necesariamente counitarias) y morfismos de coálgebras*

$$0 \to E \to D \to C \to 0$$

el morfismo inducido $(D^{\otimes *}, b)/(E^{\otimes *}, b) \to (C^{\otimes *}, b)$ induce un isomorfismo en homología, i.e. $Hoch^*_{naive}(D|E) \cong Hoch^*_{naive}(C)$ (donde $Hoch^*(D|E)$ es por definición $H^*((D^{\otimes *}, b)/(E^{\otimes *}, b))$. En el caso de coálgebras topológicas, pedimos además que la sucesión se parta sobre k (de manera continua).

Nota: una sucesión $0 \to E \to D \to C \to 0$ como en la definición anterior se llama exacta si es exacta en tanto que sucesión de espacios vectoriales.

De manera análoga diremos que C **satisface escisión** para $Hoch^*$, $Hoch^*_{bar}$ o HC^*, donde HC^* está definida para el caso no counitario utilizando el mismo complejo que en el caso counitario.

Observación: Podría haberse definido HC^*_{naive} como la cohomología del complejo $\mathcal{C}^{**}(C)$ y $HC^*(C)$ como la teoría de cohomología relativa asociada a $\widetilde{C}$: $H^*(Coker(\mathcal{C}^{**}(k) \to \mathcal{C}^{**}(\widetilde{C}))$, pero ambas definiciones dan la misma cohomología. Este fenómeno debe su explicación a que ambas teorías satisfacen la sucesión exacta larga SBI, que relaciona HC^* y HC^*_{naive} con la versión no-counitaria de $Hoch^*$, y a que existe un morfismo canónico entre las dos teorías, que es natural con respecto a la sucesión SBI. Luego el isomorfismo entre ambas teorías se demuestra usando que $HC^0 = HC^0_{naive} = Hoch^0$, y por inducción para los grados superiores, a través del lema de los cinco. Podemos observar también que, en lo que a $Hoch^*$ se refiere, el punto clave para poder pasar de $Hoch^*$ a $Hoch^*_{naive}$ depende de la aciclicidad del complejo $(C^{\otimes *}, b')$, que es inmediata en el caso counitario.

Definición 5.4. *Sea C una coálgebra (no necesariamente counitaria), diremos que C es H-**counitaria** si y sólo si el complejo $(C^{\otimes *}, b')$ es acíclico.*

Notemos que counitariedad implica H-counitariedad. Enunciamos el teorema principal de esta sección, y luego comentamos los lemas que se necesitan para su demostración:

5.3. El teorema de escisión

Teorema 5.5. *(Escisión) Sea C una coálgebra no necesariamente counitaria, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *C es H-counitaria.*
2. *C satisface escisión para $Hoch^*$*
3. *C satisface escisión para $Hoch^*_{naive}$*
4. *C satisface escisión para $Hoch^*_{bar}$*
5. *C satisface escisión para HC^**

Previo a los lemas para la demostración de este teorema de escisión, demostramos dos corolarios, que en realidad son la motivación principal del teorema:

Corolario 5.6. *Sea*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & C' \arrow[d, "j"] \\ D \arrow[r, "f'"] & D' \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de coálgebras y morfismos de coálgebras donde i y j son suryectivos. Supongamos que el morfismo inducido $\overline{f} : E = Coker(i) \to Coker(j)$ es un isomorfismo de coalgebras (no necesariamente counitarias). Un tal cuadrado será llamado **cuadrado de Milnor**. *Si además suponemos que E es H-counitaria, entonces existe una sucesión exacta larga del tipo Mayer-Vietoris*

$$\cdots \to Hoch^n(C) \to Hoch^n(D) \oplus Hoch^n(C') \to Hoch^n(D') \to Hoch^{n+1}(C) \to \ldots$$

$$\cdots \to HC^n(C) \to HC^n(D) \oplus HC^n(C') \to HC^n(D') \to HC^{n+1}(C) \to \ldots$$

Demostración: considerando las teorías relativas, se tienen las siguientes sucesiones exactas largas:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Hoch^n(C) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Hoch^n(D) \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & Hoch^n(D|C) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"] & Hoch^{n+1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Hoch^n(C') \arrow[r, "j"] & Hoch^n(D') \arrow[r] & Hoch^n(D'|C') \arrow[r] & Hoch^{n+1}(C') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

por la hipótesis de H-counitariedad, podemos sustituir las teorías relativas por no-relativas:

$$Hoch(D|C) \cong Hoch^*(E) \cong Hoch^*(D'|C')$$

Luego la sucesión de Mayer - Vietoris es una consecuencia formal del diagrama anterior; el morfismo de conexión es la composición en zigzag, subiendo con el morfismo $\left(\overline{f}\right)^{-1}$.

Corolario 5.7. *Sean C_i, $i = 1, \ldots, r$ coálgebras counitarias y sea $C = \oplus_{i=1}^r C_i$. Entonces*

$$Hoch^*(C) = \oplus_{i=1}^r Hoch^*(C_i)$$

$$HC^*(C) = \oplus_{i=1}^r HC^*(C_i)$$

Demostración: por inducción, es suficiente demostrar el corolario para $r = 2$, y esto sale de considerar el cuadrado de Milnor

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, "i_1"] \\ C_2 \arrow[r, "i_2"] & C \end{tikzcd}$$

Puesto que el conúcleo de i_1 es C_2 que es counitario, en particular es H-counitario y podemos utilizar la sucesión de Mayer - Vietoris, que da el isomorfismo deseado.

Pasamos ahora a enunciar los lemas que se usan en la demostración del teorema principal:

Lema 5.8. *Sea C una coálgebra H-counitaria,*

$$0 \to E \to D \to C \to 0$$

una sucesión exacta corta de coálgebras y morfismos comultiplicativos y M un E-D-bicomódulo. Entonces los morfismos de complejos inducidos por la proyección de D en C, $(M \otimes D^{\otimes *}, b) \to (M \otimes C^{\otimes *}, b)$ y $(M \otimes D^{\otimes *}, b') \to (M \otimes C^{\otimes *}, b')$ son quasi-isomorfismos.

Demostración: la idea general es similar a la de la demostración del lema 5.1 de sustitución del complejo standard por el complejo reducido, para los detalles ver [F-S 99b].

Como corolario de este lema, se demuestran los dos lemas siguientes:

Lema 5.9. *Bajo las mismas hipótesis que el lema 5.8, las inclusiones*

$$(E \otimes E^{\otimes *}, b) \to (E \otimes D^{\otimes *}, b) \text{ y } (E \otimes E^{\otimes *}, b') \to (E \otimes D^{\otimes *}, b')$$

son quasi-isomorfismos.

Demostración: ver [F-S 99b].

Lema 5.10. *Asumamos las mismas hipótesis que el lema 5.8, entonces las proyecciones*

$$(C \otimes D^{\otimes *}, b) \to (C \otimes C^{\otimes *}, b) \text{ y } (C \otimes D^{\otimes *}, b') \to (C \otimes C^{\otimes *}, b')$$

son quasi-isomorfismos.

Demostración: ver [F-S 99b]

Demostración: (del teorema 5.5)
1. $\Rightarrow$ 3. y 4.

Consideremos $0 \to E \to D \to C \to 0$ una extensión de coálgebras y morfismos de coálgebras donde C es H-counitaria, queremos probar que el morfismo $(D^{\otimes^*}, b)/(E^{\otimes^*}, b) \to (C^{\otimes^*}, b)$ es un quasi-isomorfismo y lo mismo para los respectivos complejos con el diferencial b'.

Considerando el diagrama de complejos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (E \otimes E^{\otimes *}, b) \arrow[r] \arrow[d] & (D^{\otimes *}, b) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (D^{\otimes *}, b)/(E^{\otimes *}, b) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & (E \otimes D^{\otimes *}, b) \arrow[r] & (D^{\otimes *}, b) \arrow[r] & (C \otimes D^{\otimes *}, b) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & (C^{\otimes *}, b) &
\end{tikzcd}$$

por el lema 5.9 el morfismo de la primera columna es un quasi-isomorfismo, luego (utilizando un argumento tipo lema de los cinco) también es un quasi-isomorfismo la flecha punteada.

El morfismo de la parte de abajo de la tercera columna es un quasi-isomorfismo por el lema 5.10. Los argumentos para el diferencial b' son idénticos.

(3. and 4.) $\Leftrightarrow$ 2. es una consecuencia de la sucesión exacta larga de la observación 2. del primer párrafo de esta sección.

2. $\Leftrightarrow$ 5. es una consecuencia de la sucesión SBI.

4. $\Rightarrow$ 1.

Sabemos que C satisface escisión para $Hoch^*_{bar}$ y queremos ver que C es H-counitaria. Elegimos la extensión

$$0 \to k \to \widetilde{C} \to C \to 0$$

Como k y $\widetilde{C}$ son counitarias, $Hoch^*_{bar}(k) = 0 = Hoch^*_{bar}(\widetilde{C})$, entonces

$$Hoch^*_{bar}(C) = Hoch^*_{bar}(\widetilde{C}|k) = 0.$$

Para finalizar, basta ver 3. $\Rightarrow$ 1.

Consideremos de nuevo la extensión

$$0 \to k \to \widetilde{C} \to C \to 0$$

Por hipótesis $Hoch^*_{naive}(\widetilde{C}|k) \cong Hoch^*_{naive}(C)$. Pero por definición, $Hoch^*(C) = Hoch^*_{naive}(\widetilde{C}|k)$ y sabemos que hay una sucesión exacta larga (de nuevo observación 2. de esta sección) relacionando $Hoch^*(C)$, $Hoch^*_{naive}(C)$ y $Hoch^*_{bar}(C)$, por lo tanto podemos concluir que $Hoch^*_{bar}(C) = 0$, y esto es precisamente la definición de H-counitariedad.

6. Extensión de la teoría al caso diferencial graduado

6.1. Coálgebras diferenciales graduadas

Una k-coálgebra diferencial graduada es una coálgebra en la categoría de k-espacios vectoriales diferenciales graduados. La categoría de espacios vectoriales diferenciales graduados sobre un cuerpo k es una categoría monoidal, por lo tanto la noción de coálgebra en esa categoría tiene sentido.

Recordamos esta estructura monoidal: si $V = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ y $W = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}W_n$ son dos espacios vectoriales graduados, entonces $V \otimes W$ es un espacio vectorial graduado con la graduación $(V \otimes W)_n = \oplus_{p+q=n}V_p \otimes V_q$; si $V = (\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n, d_V)$ y $W = (\oplus_{n\in\mathbb{Z}}W_n, d_W)$ son además objetos diferenciales, el diferencial en $V \otimes W$ se define como $d(v \otimes w) = d(v) \otimes w + (-1)^{|v|}v \otimes d(w)$ donde v es un elemento homogéneo de grado $|v|$, y se extiende este diferencial por linealidad.

Una coálgebra diferencial graduada es entonces un espacio vectorial diferencial graduado $C = (\oplus_{n\in\mathbb{Z}}C_n, d_C)$ junto con un morfismo de espacios vectoriales diferenciales graduados $\Delta_C : C \to C \otimes C$ que es coasociativo y counitario.

Que Δ sea un morfismo de espacios diferenciales graduados dice que es un morfismo graduado (i.e. $\Delta|_{C_n} : C_n \to \oplus_{p+q=n}C_p \otimes C_q$) y que conmuta con el diferencial, tomando en $C \otimes C$ el diferencial del producto tensorial. En fórmulas, esto dice que si $c \in C$,

$$\Delta(d(c)) = \sum_{(c)} d(c_1) \otimes c_2 + (-1)^{|c_1|}c_1 \otimes d(c_2)$$

(notación de Sweedler sobreentendida, y se eligieron los c_i's homogéneos). Esta condición se suele denominar como condición de coderivación de d.

De hecho, la categoría de espacios vectoriales diferenciales graduados es una categoría de comódulos sobre un álgebra de Hopf (de ahí su estructura monoidal). Si consideramos $k[\mathbb{Z}] = k[x, x^{-1}]$, los comódulos sobre $k[x, x^{-1}]$ son precisamente los objetos $\mathbb{Z}$-graduados, si además cada objeto tiene un diferencial de cuadrado nulo, entonces es una representación de $k[d]/d^2$ (o equivalentemente, una corepresentación de $(k[d]/d^2)^* = k \oplus kD$, donde llamamos $\{1, D\}$ a la base dual de $\{1, d\} \subset k[d]/d^2$). Llamemos H a la k-álgebra generada por x, x^{-1} y D con las relaciones

$$Dx = -xD \;\; ; \;\; D^2 = 0$$

y definimos la comultiplicación

$$\Delta(D) = D \otimes x + 1 \otimes D$$

$$\Delta(x) = x \otimes x$$

Esta definición de Δ es compatible con las relaciones $Dx = -xD$ y $D^2 = 0$, por lo tanto se puede extender multiplicativamente. Con esta multiplicación y comultiplicación, H es un álgebra de Hopf que no es ni conmutativa ni coconmutativa, la counidad está determinada por $D \mapsto 0$ y $x \mapsto 1$, la antípoda esta dada por $x \mapsto x^{-1}$ y $D \mapsto -Dx^{-1}$. Una base de H está dada por $\{x^n : n \in \mathbb{Z};\ D.x^n : n \in \mathbb{Z}\}$, y se tienen morfismos de coálgebra $H \to k[z, z^{-1}]$ (evaluando D en cero) y $H \to k[D]/D^2 = (k[d]/d^2)^*$ (evaluando x en uno), por lo tanto, todo H-comódulo es un $k[x, x^{-1}]$-comódulo y $(k[d]/d^2)^*$-comódulo (o bien $k[d]/d^2$-módulo). Por otro lado, si V es un espacio vectorial diferencial graduado, es fácil chequear que

$$v \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n \otimes v_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} Dx^n \otimes d(v_n)$$

es una coacción, donde $v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n$ es la decomposición que da la graduación de V y d es el diferencial de V. Con menor grado de evidencia, se puede mostrar que estas construcciones son recíprocas.

A modo de ejemplo, mostraremos como las fórmulas de la graduación y del diferencial del producto tensorial se pueden deducir de la estructura monoidal de los H-comódulos:

Sean V y W dos espacios vectoriales diferenciales graduados, sea $v_p \in V_p$ y $w_q \in W_q$ dos elementos homogéneos de grado p y q respectivamente. Sabemos en general que si m es un elemento de un H-comódulo, entonces $\rho(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n \otimes m_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} Dx^n \otimes d(m_n)$, entonces para calcular $d(v_p \otimes w_q)$ y el grado de $v_p \otimes w_q$, lo que hay que hacer es co-actuar a $v_p \otimes v_q$. La coacción en $V \otimes W$ está definida diagonalmente, es decir, se coactúa tanto en V como en W, y se multiplican las componentes en H, por lo tanto

$$\rho(v_p \otimes w_q) = (x^p \otimes v_p + Dx^p \otimes d(v_p))(x^q \otimes w_q + Dx^q \otimes d(w_q)) =$$

(multiplicación realizada en $T_H((H \otimes V) \oplus (H \otimes W))$)

$$= x^p x^q \otimes v_p \otimes w_q + Dx^p x^q \otimes d(v_p) \otimes w_q + x^p Dx^q \otimes v_p \otimes d(w_q) + Dx^p Dx^q \otimes d(v_p) \otimes d(w_q) =$$

$$= x^{p+q} \otimes v_p \otimes w_q + Dx^{p+q} \otimes (d(v_p) \otimes w_q + (-1)^p v_p \otimes d(w_q))$$

Esta cuenta nos dice que $v_p \otimes w_q$ es homogéneo de grado $p+q$, y que $d(v_p \otimes w_q)$ calculado en la categoría de H-comódulos, es $d(v_p) \otimes w_q + (-1)^p v_p \otimes d(w_q)$.

Toda k-coálgebra graduada puede considerarse como coálgebra diferencial graduada con diferencial nulo, y toda coálgebra en el sentido usual puede considerarse como graduada con la graduación $(C)_0 = C$ y $(C)_n = 0\ \forall n \neq 0$. Si (C, d) es una coálgebra diferencial graduada, entonces $H_*((C, d))$ es una coálgebra graduada. Ejemplo de este tipo es la siguiente situación:

Sea X un espacio topológico, entonces el complejo singular $(S_*(X), d)$ es una coálgebra diferencial graduada en donde la comultiplicación está inducida por el morfismo diagonal $X \to X \times X$ más el morfismo de Alexander-Whitney $S_*(X \times X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$. De esta manera, como ya se había observado $H_*((S_*(X), d)) = H_*(X)$ es una coálgebra graduada.

6.2. Comódulos diferenciales graduados y $Chain(C)$

Fijemos por esta sección (C, d_C) una k-coálgebra diferencial graduada (DG).

La categoría de comódulos diferenciales graduados es la categoría natural de (co)representaciones de una coálgebra DG, la definición es la obvia:

Definición 6.1. *Un espacio vectorial diferencial graduado (M, d) es un* **comódulo diferencial graduado** *si y sólo si es un C-comódulo en la categoría de objetos graduados, i.e. se supone dado un morfismo de estructura $\rho_M : M \to C \otimes M$ que es un morfismo de objetos diferenciales graduados y coasociativo.*

Si M y N son dos comódulos diferenciales graduados, diremos que $f : M \to N$ es un **morfismo de comódulos diferenciales graduados** si f es un morfismo de complejos que además es un morfismo de comódulos. A esta categoría la llamaremos $Chain(C)$.

Observación: Si C es una coálgebra en la categoría de espacios vectoriales, como dijimos antes, podemos considerarla como una coálgebra diferencial graduada, con diferencial cero y concentrada en grado cero (o lo que es lo mismo, una coálgebra en la categoría de H-comódulos con H-coacción trivial). En este caso, el diferencial en $C \otimes M$ es $id \otimes d_M$ para cualquier complejo M, luego, que $\rho_M : M \to C \otimes M$ sea un morfismo en $Chain(C)$ dice simplemente que $\rho_M : M_n \to C \otimes M_n$ (i.e. que cada M_n es un C-comódulo) y que $(id_C \otimes d_M) \circ \rho_M = \rho_M \circ d_M$ (i.e. que d_M es C-colineal). Para este caso particular, $Chain(C)$ coincide con la categoría de complejos sobre la categoría de C-comódulos, que es el primer paso de la construcción de Verdier hacia las categorías derivadas (ver [Ver 77]).

En general, la categoría $Chain(C)$ de comódulos diferenciales graduados es una categoría abeliana, teniendo por lo tanto la noción de sucesión exacta corta (o de sucesiones exactas en general), pero además tiene una noción natural de homotopía. Si uno se pregunta si la estructura de categoría abeliana sobrevive cuando se consideran morfismos módulo homotopía, la respuesta en general es no, a menos que la categoría inicial sea muy particular. Por ejemplo, si $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y $K(\mathcal{A})$ denota la categoría de complejos sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ la categoría $K(\mathcal{A})$ módulo homotopía, es sabido que $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ es abeliana si y sólo si $\mathcal{A}$ es semisimple. No es de esperar entonces una noción de sucesiones exactas en la categoría $Chain(C)$ módulo homotopía. Sin embargo, es posible encontrar un substituto a las sucesiones exactas cortas, y esta noción es la de cono. Si definimos los triángulos en $Chain(C)$ como las uplas isomorfas a $(u : X \to Y, Co(u))$ con $X,\ Y \in Obj(Chain(C))$, $u \in Hom_{Ch(C)}(X, Y)$ (aquí la notación de upla $(u : X \to Y, Co(u))$ simboliza la 6-upla $(X, Y, Co(u), u : X \to Y, Y \to Co(u), Co(u) \to X[-1])$) donde

$$Co(u)_n = X_n[-1] \oplus Y_n$$

$$d_{Co(u)} = d_{X[-1]} + f + d_Y$$

Veremos que bajo ciertas condiciones, si u es monomorfismo, $Co(u)$ es equivalente homotópico a $Coker(u)$. Con esta definición de triángulos, algunos axiomas de categoría

triangulada se satisfacen automaticamente, como por ejemplo que todo morfismo $u : X \to Y$ se puede completar a un triángulo, o que todo par de morfismos $(a, b) : (X \to Y) \to (X' \to Y')$ (en el sentido que el diagrama
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$$
es conmutativo) induce un morfismo entre $Co(u)$ y $Co(u')$. Sin embargo, uno de los axiomas mas sencillos de categorías trianguladas, que es que $(id : X \to X, 0)$ sea un triángulo, falla, pues si bien $Co(id_X)$ es homotópico al cero, no es necesariamente isomorfo a cero (a menos que $X = 0$). Vemos de esta manera que si bien $\mathit{Chain}(C)$ no es una categoría triangulada, el lugar natural para definir los triángulos no es $\mathit{Chain}(C)$ sino la categoría de homotopía $\mathcal{H}(C)$ que definiremos en breve. Esta estructura en $\mathcal{H}(C)$ y en $\mathcal{D}(C)$ (la categoría derivada de $\mathit{Chain}(C)$) será fundamental pues la noción de triángulos es la que de alguna manera sustituye a la de sucesión exacta corta, dado que los triángulos inducen sucesiones exactas largas en homología.

6.3. Categoría derivada de una coálgebra, $\mathcal{H}(C)$ y $\mathcal{D}(C)$

La categoría derivada de las co-representaciones de una coálgebra se define de manera completamente análoga a la de categoría derivada de módulos sobre un anillo, de hecho la definición de categoría derivada fue hecha para categorías abelianas arbitrarias [Ver 77]. Daremos aquí la definición de categoría derivada para el caso de coálgebras diferenciales graduadas, que incluye como subejemplo a las coálgebras usuales considerándoas concentradas en grado cero y con diferencial nulo.

Una de las motivaciones del estudio de la categoría derivada de coálgebras diferenciales graduadas y de los invariantes que se pueden definir sobre ellas es el ejemplo de la homología singular de un espacio topológico X. El espíritu es no trabajar al nivel de $H_*(X)$ sino al de $S_*(X)$ que es una coálgebra diferencial graduada, y ahí contar con una teoría que permita sustituir a $S_*(X)$ por otra coálgebra diferencial graduada más sencilla tal que su categoría derivada sea equivalente.

6.3.1. La categoría $\mathcal{H}(C)$

Como habíamos dicho anteriormente, la categoría $\mathit{Chain}(C)$ conlleva la noción de homotopía: dos morfismos $f, g : M \to N$ entre dos comódulos diferenciales graduados se dicen **homotópicos** en caso de que exista un morfismo de comódulos graduados $h : M \to N[1]$ de tal manera que $f - g = hd_M + d_N h$. Se verifica que la relación "ser homotópico a" es de equivalencia, además de ser compatible con la suma y la composición, como consecuencia puede definirse una nueva categoría $\mathcal{H}(C)$ que tiene por objetos a los mismos objetos que $\mathit{Chain}(C)$, pero los morfismos se definen como las clases de homotopía de los morfismos de $\mathit{Chain}(C)$. Por lo dicho anteriormente esta nueva categoría es aditiva.

Destacamos en este momento que siendo $Chain(C)$ una categoría abeliana, la definición dada aquí puede malinterpretarse dado que Verdier define la noción de categoría derivada de una categoría abeliana, construyendo como primer paso la categoría de complejos sobre la categoría inicial, para así tener una noción de homotopía. De alguna manera ese paso aquí se ahorra porque $Chain(C)$ ya tiene una noción natural de homotopía. La construcción de $\mathcal{H}(C)$ se hace tomando clases de morfismos pero manteniendo los objetos, que eran complejos desde un principio, en ningún momento se trabajará con la categoría de complejos de complejos (ver [Ke 94a]).

Observación: Notamos que existe un funtor $H_* : Chain(C) \to {}_{\mathbb{Z}}Vec$ que consiste en asignar a cada objeto M su grupo de homología. Como morfismos homotópicos inducen el mismo morfismo en homología, este funtor se factoriza por otro (que llamaremos también con el mismo nombre) $H_* : \mathcal{H}(C) \to {}_{\mathbb{Z}}Vec$.

Además de aditiva, $\mathcal{H}(C)$ es una categoría triangulada. Habíamos mencionado que la categoría $Chain(C)$ con los conos como triángulos no era una categoría triangulada porque por ejemplo $(id : X \to X, 0)$ e $(id : X \to X, Co(id_X))$ no eran isomorfos pues 0 no es isomorfo a $Co(id_X)$ en $Chain(C)$, pero sí son homotópicamente equivalentes, $Co(id)$ es isomorfo a 0 en $\mathcal{H}(C)$. Para mayor claridad de la exposición, comentaremos los axiomas de categorías trianguladas, para una exposición mas detallada, puede consultarse [Har 66] o [G-M 96].

6.4. Categorías trianguladas y $\mathcal{H}(C)$

La axiomática de categorías trianguladas se expresa a partir de los siguientes datos: una categoría aditiva $\mathcal{C}$, un funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ llamado funtor traslación, que es un automorfismo, y una clase de 6-uplas $(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to T(X))$ llamadas triángulos. Los axiomas son los siguientes:

TR1. (a) $(X, X, 0, id, 0, 0)$ es un triángulo.

(b) Toda upla isomorfa a un triángulo, es un triángulo, donde un morfismo de uplas $(X, Y, Z, u, v, w) \to (X', Y', Z', u', v', w')$ es una terna de morfismos entre los objetos $(f_X : X \to X', f_Y : Y \to Y', f_Z : Z \to Z')$ tales que los cuadrados del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_X"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f_Z"] & T(X) \arrow[d, "f_{TX}"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z \arrow[r, "w'"] & T(X) \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Un isomorfismo de triángulos es un morfismo de triángulos tales que todos los morfismos son isomorfismos.

c. Todo morfismo $u : X \to Y$ puede ser completado a un triángulo (X, Y, Z, u, v, w)

TR2. Una upla (X, Y, Z, u, v, w) es un triángulo si y sólo si la upla $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ es un triángulo.

TR3. Dados dos triángulos (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') y dos morfismos $f : X \to X'$ y $g : Y \to Y'$ tales que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, puede extenderse (de manera no necesariamente única) a un morfismo de triángulos $(f, g, h) : (X, Y, Z, u, v, w) \to (X', Y', Z', u', v', w')$

TR4. (axioma octahedral) Este axioma suele dibujarse en forma de octahedro. Nosotros, en vez de dar la definición habitual, daremos otra equivalente, que es la siguiente:

Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos morfismos en $\mathcal{C}$. Por el axioma TR1 c. sabemos que estos morfismos se completan a triángulos, llamaremos $Co(f)$ y $Co(g)$ respectivamente al tercer objeto de la upla que empieza con (X, Y) y con (Y, Z) respectivamente, y a $Co(gf)$ al tercer objeto del triángulo asociado al morfismo $gf : X \to Z$.

Consideramos el siguiente diagrama de lineas llenas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Co(f) \arrow[d, dashed] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Co(gf) \arrow[d, dashed] \\
0 \arrow[r] & Co(g) \arrow[r, equal] & Co(g)
\end{tikzcd}$$

Como la primera y segunda fila son triángulos, por el axioma TR3, existe la flecha punteada $Co(f) \to Co(gf)$ haciendo de la terna un morfismo de triángulos. Sabemos que la fila de abajo es un triángulo (TR1 (a) + TR2), luego por el axioma TR3 existe la flecha punteada $Co(gf) \to Co(g)$ haciendo de la terna de morfismos entre la fila del medio y la de abajo un morfismo de triángulos.

Lo que afirma el axioma TR4 es que $Co(f) \to Co(gf) \to Co(g)$ es un triángulo, donde la flecha de conexión $Co(g) \to T(Co(f))$ se consigue completando hacia abajo el diagrama anterior

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Co(f) \arrow[d, dashed] \\
X \arrow[r, "gf"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Co(gf) \arrow[d, dashed] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & Co(g) \arrow[r, equal] \arrow[d] & Co(g) \arrow[d, dashed] \\
T(X) \arrow[r, "T(f)"] & T(Y) \arrow[r] & T(Co(f))
\end{tikzcd}$$

Es habitual encontrar como notación $X[1] = T(X)$ y en general $X[n] = T^n(X)$ para $n \in \mathbb{Z}$. El ejemplo algebraico fundamental de categoría triangulada es la categoría de complejos sobre una categoría abeliana, módulo homotopía, con el funtor T igual a la traslación (y que cambia también el signo del diferencial), y los triángulos todas las uplas homotópicamente equivalentes a uplas del tipo

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Co(f) \longrightarrow X[1]$$

donde $Co(f)$ es el cono de la aplicación f.

La noción de triángulo en las categorías trianguladas es la que reemplaza moralmente a la noción de sucesiones exactas cortas de las categorías abelianas, o en las categorías de complejos sobre una categoría abeliana. Como ilustración de este punto de vista, se tienen los dos resultados siguientes:

Proposición 6.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría triangulada, (X, Y, Z, u, v, w) un triángulo en $\mathcal{C}$, y sea U otro objeto de $\mathcal{C}$. Entonces las sucesiones*

$$\cdots \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(U, X) \xrightarrow{u_*} Hom_{\mathcal{C}}(U, Y) \xrightarrow{v_*} Hom_{\mathcal{C}}(U, Z) \xrightarrow{w_*} Hom_{\mathcal{C}}(U, X[1]) \xrightarrow{u[1]_*} \cdots$$

$$\cdots \longleftarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, U) \xleftarrow{u^*} Hom_{\mathcal{C}}(Y, U) \xleftarrow[v_*]{} Hom_{\mathcal{C}}(Z, U) \xleftarrow{w^*} Hom_{\mathcal{C}}(X[1], U) \longleftarrow$$

son sucesiones exactas largas.

Demostración: Ver [G-M 96] o [Har 66].

Proposición 6.3. *([G-M 96], cap. IV, §1 , Lemma 13) Sea $K(\mathcal{A})$ la categoría de complejos sobre una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Si*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en $K(\mathcal{A})$ tal que en cada grado $0 \to X_n \to Y_n \to Z_n \to 0$ es una secesión de $\mathcal{A}$ que se parte. Entonces existe un morfismo $f : Z \to X[-1]$ tal que (X, Y, Z, u, v, f) es equivalente homotópico al triángulo $(X, Y, Co(f), f, i, p)$.

Como este resultado se extiende a álgebras y a coálgebras diferenciales graduadas, reproducimos la demostración de [G-M 96].

Demostración: Sea $\mathcal{B}$ la categoría ${}^{\mathbb{Z}}\mathcal{A}$, es decir, la categoría formada por objetos de $\mathcal{A}$ que son $\mathbb{Z}$-graduados y morfismos graduados. Como la sucesión $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ se parte en $\mathcal{B}$, podemos escribir a Y como $X \oplus Z$. Del hecho de que $X \to Y$ e $Y \to Z$ sean morfismos de complejos, es necesario que el diferencial de Y sea de la forma $d_Y(x, z) = (d(x) - f(z), d(z))$ donde $f : Z \to X[-1]$ es un morfismo graduado. Del hecho de que $d_Y^2 = 0$ obtenemos que $df + fd = 0$, y por lo tanto, como el diferencial de $X[-1]$ tiene el signo cambiado, tenemos que $f : Z \to X[-1]$ es un morfismo de complejos.

Se define el morfismo de uplas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X[-1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"] & X \oplus Z \arrow[r, "v"] & X[-1] \oplus X \oplus Z \arrow[r, "f"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

donde $g(z) = (f(z), 0, z)$.

Los cuadrados de la izquierda y el de la derecha obviamente conmutan. El cuadrado del medio no conmuta en la categoría $\mathcal{A}$, pero si en la categoría $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, la homotopía entre las dos posibles composiciones esta definida por

$$h : X \oplus Z \to (X[-1] \oplus X \oplus Z)[1]$$

$$(x, z) \mapsto (x, 0, 0)$$

El morfismo g es una equivalencia homotópica, para ver esto consideramos $g' : X[-1] \oplus X \oplus Z \to Z$ la proyección en la coordenada Z. La composición $gg' = id_Z$, y $g'g$ es homotópica a la identidad con homotopía

$$k : X[-1] \oplus X \oplus Z \to (X[-1] \oplus X \oplus Z)[-1]$$

$$(x, x', z) \mapsto (x', 0, 0)$$

Consideraremos ahora dos ejemplos en donde la proposición anterior se generaliza:
Ejemplo: 1 Sea A una k-álgebra diferencial graduada, es decir, un álgebra graduada provista de un operador k-lineal homogéneo $d : A \to A[1]$ de cuadrado cero tal que $d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b)$ para todo a, b en A. Sea $Chain(A)$ la categoría formada por A-módulos (a derecha) diferenciales graduados, más precisamente, M se dirá un objeto de $Chain(A)$ si M es A-módulo a derecha graduado, provisto de un diferencial que verifica $d(ma) = d(m)a + (-1)^{|m|}md(a)$ para todo $a \in A$ y para todo $m \in M$. Si

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en $Chain(A)$ que se parte como sucesión de A-módulos graduados, entonces existe un morfismo $f : Z \to X[-1]$ tal que (X, Y, Z, u, v, f) es equivalente homotópico al triángulo $(X, Y, Co(f), f, i, p)$.
Demostración: copiamos la demostración anterior, lo único que hay que verificar es que el morfismo f es un morfismo en $Chain(A)$. Por las mismas razones de antes, f es graduado y conmuta con el diferencial, veamos que es A-lineal:

Llamemos $s : Z \to Y$ a la sección de v asociada a la descomposicón $Y = X \oplus Z$. Entonces el morfismo f queda definido como

$$f(z) = d(s(z)) - s(d(z)) \quad (z \in Z)$$

Utilizando ahora el hecho de que s es A-lineal y que d es una derivación obtenemos, para $a \in A$ y $z \in Z$, que

$$\begin{aligned} f(za) = &\ d(s(za)) - s(d(za)) \\ = &\ d(s(z)a) - s(d(z)a) - (-1)^{|z|}s(zd(a)) \\ = &\ d(s(z))a + (-1)^{|s(z)|}s(z)d(a) - s(d(z))a - (-1)^{|z|}s(z)d(a) \\ = &\ d(s(z))a - s(d(z))a \\ = &\ f(z)a \end{aligned}$$

Ejemplo: 2 Sea C una k-álgebra diferencial graduada, consideremos la categoría $Chain(C)$ y llamemos $\mathcal{B}$ a la categoría de C-comódulos graduados (a izquierda). Si

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en $Chain(A)$ que se parte en $\mathcal{B}$ entonces existe un morfismo $f : Z \to X[-1]$ tal que (X, Y, Z, u, v, f) es equivalente homotópico al triángulo $(X, Y, Co(f), f, i, p)$.

Demostración: o bien podemos verificar que f es colineal, o bien podemos embeber $Chain(C)$ en $Chain(A)$ donde A es el dual graduado de C, y entonces este ejemplo es consecuencia del ejemplo anterior.

6.4.1. La categoría $\mathcal{D}(C)$

Llamamos **categoría derivada de** C y notamos $\mathcal{D}(C)$ a la localización de la categoría $\mathcal{H}(C)$ con respecto a los quasi-isomorfismos en $\mathcal{H}(C)$.

Esta categoría nuevamente 'hereda' una estructura de categoría triangulada, es decir, una estructura triangular tal que el funtor localización $\mathcal{H}(C) \to \mathcal{D}(C)$ manda triángulos en triángulos y conmuta con el funtor traslación. A su vez, como los quasi-isomorfismos inducen isomorfismos en homología, el funtor $H_* : \mathcal{H}(C) \to {}_{\mathbb{Z}}Vec$ está bien definido sobre $\mathcal{D}(C)$ pues es un límite inductivo en donde todos los morfismos son isomorfismos, y esos límites existen en cualquier categoría, en particular en ${}_{\mathbb{Z}}Vec$.

Disgresión: Dada una coálgebra C, C^* es un álgebra y todo C-comódulo (a izquierda) es un C^*-módulo a derecha y tenemos que si M y N son dos comódulos, entonces $Com_C(M, N) = Hom_{C^*}(M, N)$. Lo mismo sucede en el caso diferencial graduado (tomando el dual grado a grado) y con la categoría $Chain(C)$, y al estar definidas las homotopías a partir de morfismos de C-comódulos, dados M y N en $Chain(C)$ se tiene que $Hom_{Ch(C)}(M, N) = Hom_{Ch(C^*)}(M, N)$ y $Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, N) = Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(M, N)$. La relación entre $Hom_{\mathcal{D}(C)}(-, -)$ y $Hom_{\mathcal{D}(C^*)}(-, -)$ no es tan clara, pues si M es un C-comódulo diferencial graduado, X un C^*-módulo diferencial graduado y $f : X \to M$ un quasi-isomorfismo C^*-lineal, no está claro que exista un N-comódulo diferencial graduado y un quasi-isomorfismo $g : N \to X$ C^*-lineal, para así saber que la clase de quasi-isomorfismos con dominio en los C-comódulos es 'filtrante' con respecto a la clase de quasi-isomorfismos con dominio cualquiera.

7. Estudio de la categoría $\mathcal{D}(C)$

7.1. Objetos cerrados

El objetivo de esta sección es dar una caracterización de la categoría $\mathcal{D}(C)$ en términos de una subcategoría de $\mathcal{H}(C)$. La ventaja de trabajar en $\mathcal{H}(C)$ en vez de $\mathcal{D}(C)$ es que el Hom en la categoría de homotopía es más "concreto".

Fijamos C una coálgebra diferencial graduada. Comenzamos con una definición:

Definición 7.1. *Un objeto I en $Chain(C)$ se dice* **cerrado** *sii*

$$Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, I) = Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, I)$$

para todo objeto M de $Chain(C)$.

Notación: La subcategoría plena de $\mathcal{H}(C)$ formada por los objetos cerrados se denotará $\mathcal{H}_c(C)$. Es claro que esta subcategoría es estable por conos (lema de los cinco para $Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, -)$ y $Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, -)$), traslaciones y por productos arbitrarios.

El primer ejemplo de objeto cerrado es la coálgebra misma C, vista como objeto de $Chain(C)$, pues $Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C) = H_0(M^*)$, que es estable por quasi-isomorfismos. Para verificar este hecho veremos un resultado general de adjunción.

7.2. Adjunción

Antes de probar la adjunción, demostraremos un hecho que si bien puede considerarse como hipótesis natural, éste se deduce de hipótesis anteriores.

Lema 7.2. *Sea (C, Δ) una coálgebra graduada no necesariamente counitaria. Entonces, si C es counitaria, la counidad $\epsilon : C \to k$ es graduada (considerando naturalmente a k como objeto graduado concentrado en grado cero).*

Demostración: sabemos que $c = (\epsilon \otimes 1)\Delta(c) = (1 \otimes \epsilon)\Delta(c)$. Por otro lado, $\Delta : C \to C \otimes C$ es un morfismo graduado, por lo tanto si $c \in C_n$, entonces $\Delta(c) = \sum c^1_{n-p} \otimes c^2_p$ con $c^i_k \in C_k$, $i = 1, 2$. Entonces, $\sum_p \epsilon(c^1_{n-p})c^2_p = c = \sum_p c^1_{n-p}\epsilon(c^2_p) \in C_n$. De la primera ecuación obtenemos que $\epsilon(c^1_k)c^2_{n-k} = 0\ \forall k \neq 0$ y de la segunda ecuación obtenemos que $c^1_{n-k}\epsilon(c^2_k) = 0\ \forall k \neq 0$. Ahora calculemos $\epsilon(c)$:

$$\epsilon(c) = \epsilon\left(\sum_p \epsilon(c^1_{n-p})c^2_p\right) =$$
$$= \epsilon(\epsilon(c^1_0)c^2_n) = \epsilon(c^1_0)\epsilon(c^2_n)$$

por lo tanto, para un elemento homogéneo c, $\epsilon(c) = 0$ a menos que $\Delta(c) \in C_0 \otimes C_0$. Pero en este caso, puesto que c era homogéneo y $\Delta(c) \in C_0 \otimes C_0 \subseteq (C \otimes C)_0$, entonces $c \in C_0$, lo que demuestra la homogeneidad de ϵ.

Enunciamos y demostramos la proposición que da nombre a esta subsección:

Proposición 7.3. *Sea C una coálgebra diferencial graduada y $M \in Chain(C)$, entonces*

$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C \otimes V) = Hom_{\mathcal{H}(k)}(M, V)$$

$$Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C \otimes V) = Hom_{\mathcal{D}(k)}(M, V)$$

Demostración: La conocida adjunción en la categoría de comódulos se puede definir de la misma manera en la categoría $Chain(C)$:

$$Hom_{Ch(C)}(M, C \otimes V) \cong Hom_{Ch(k)}(M, V)$$

$$f \longmapsto (\epsilon \otimes id)f$$

$$(id \otimes f')\rho^- \longleftarrow f'$$

Sean ahora f y g en $Hom_{Ch(C)}(M, C \otimes V)$ dos flechas homotópicas con homotopía h, entonces $(\epsilon \otimes 1)h$ es una homotopía entre $(\epsilon \otimes 1)f$ y $(\epsilon \otimes 1)g$, para probar ésto se usa que $\epsilon \circ d = 0$ pues d es una coderivación. Si $f, g : M \to V$ son dos transformaciones lineales homotópicas, entonces la homotopía $(1 \otimes h)\rho_M$ es una homotopía entre $1 \otimes f$ y $1 \otimes g$, para esto se usa la ecuación de coderivación del diferencial de M.

Entonces la adjunción está bien definida en homotopía y se tiene:

$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C \otimes V) = Hom_{\mathcal{H}(k)}(M, V)$$

mediante la misma fórmula. Si $f : M' \to M$ es un quasi-isomorfismo, entonces el funtor olvido da un quasi-isomorfismo, por otro lado si $\phi : V \to V'$ es un quasi-isomorfismo, por la fórmula de Künneth $id \otimes \phi$ es un quasi-isomorfismo en $C \otimes V$ (notar que como k es un cuerpo, puede usarse la fórmula de Künneth), entonces la adjunción pasa al límite de la localización por quasi-isomorfismos, por lo tanto

$$Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C \otimes V) = Hom_{\mathcal{D}(k)}(M, V)$$

Corolario 7.4. *Dado V un k-espacio vectorial diferencial graduado, el C-comódulo diferencial graduado $C \otimes V$ es un objeto cerrado.*

Demostración: utilizamos la proposición anterior más la igualdad $\mathcal{H}(k) = \mathcal{D}(k)$:

$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C \otimes V) \cong$$

$$\cong Hom_{\mathcal{H}(k)}(M, V) = Hom_{\mathcal{D}(k)}(M, V) \cong$$

$$\cong Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C \otimes V)$$

7.3. La resolución standard

En general, no todo objeto es cerrado, si no, la noción de quasi-isomorfismo y la de equivalencia homotópica coincidirían, y esto claramente no siempre es cierto. Demostraremos, sin embargo, que al menos cuando la coálgebra tiene una graduación no negativa, la subcategoría $\mathcal{H}_c(C)^+$ formada por los objetos de $Chain(C)$ acotados por debajo (que llamamos $Chain(C)^+$), cubre a toda la categoría $\mathcal{D}(C)^+$ (donde $\mathcal{D}(C)^+$ es la localización por quasi-isomorfismos de $\mathcal{H}(C)^+$). Más precisamente, demostraremos, en esta sección, que $\mathcal{D}(C)^+$ es una categoría equivalente a $\mathcal{H}_c(C)^+$. Para eso demostraremos que el funtor inclusión compuesto con la localización $\mathcal{H}_c(C)^+ \to \mathcal{H}(C)^+ \to \mathcal{D}(C)^+$ es quasi-suryectivo y es un isomorfismo en el Hom. Naturalmente la parte del Hom es tautológica con respecto a la definición de objeto cerrado, la parte difícil es ver que el funtor es quasi-suryectivo. Para esto debemos demostrar que existen 'suficientes' objetos cerrados, es decir, que para cada objeto en $\mathcal{D}(C)^+$, existe un complejo quasi-isomorfo al complejo inicial que además es un objeto cerrado. Dado un objeto cualquiera $M \in Chain(C)^+$, encontrar un quasi-isomorfismo $M \to I$ con I cerrado es completamente análogo a la técnica de sustituir módulos por sus resoluciones (inyectivas). En general, en la categoría $Chain(C)$, dado M existe un objeto canónico $C(M)$ que es la resolución standard de M, que es quasi-isomorfo a M vía el morfismo de estructura, lo que demostraremos además es que si C es graduada positiva y $M \in Chain(C)^+$, entonces $C(M)$ es cerrado.

La resolución standard en el caso diferencial graduado se define de manera similar a la resolución standard de un comódulo sobre una coálgebra usual, la diferencia radica en que en el contexto diferencial graduado, la resolución standard tiene en cuenta el diferencial de la coálgebra y el diferencial del objeto $M \in Chain(C)$. Más precisamente, dado $M \in Chain(C)$, se considera el espacio vectorial $\oplus_{n\geq 1} C^{\otimes n} \otimes M$ con la siguiente graduación:

$$\left(\bigoplus_{n\geq 1} C^{\otimes n} \otimes M\right)_p = \bigoplus_{i_1+\dots i_r+j+r-1=p} C_{i_1} \otimes \dots C_{i_r} \otimes M_j$$

Este espacio vectorial en realidad está bigraduado, por un lado se tiene la graduación usual del producto tensorial (ya que tanto M como C son graduados) y por otro lado está graduado por la cantidad de factores C menos uno, la graduación que hemos elegido corresponde al grado total asociado a la bigraduación mencionada.

Se tienen a su vez dos diferenciales, uno por cada una de las dos graduaciones. Por un lado está el diferencial del producto tensorial (utilizando el hecho de que C y M son objetos diferenciales graduados) y por otro lado se tiene el diferencial b' (utilizando el hecho de que M es un C-comódulo). El diferencial en $C(M)$ es por definición el diferencial total, que explícitamente se escribe como:

$$\partial(c_{i_1}, \dots, c_{i_r}, m) = (-1)^r \sum_{k=1}^{r} (-1)^{|c_{i_1}|+\dots+|c_{i_{k-1}}|} (c_{i_1}, \dots, d_C(c_{i_k}), \dots, c_{i_r}, m) +$$

$$+(-1)^r(-1)^{|c_{i_1}|+\dots+|c_{i_r}|}(c_{i_1}, \dots, c_{i_r}, d(m)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}(c_{i_1},\dots,\Delta(c_{i_k}),\dots,c_{i_r},m)+(c_{i_1},\dots,c_{i_r},\rho^-(m))$$

De manera abreviada, escribimos

$$\partial(c_{i_1},\dots,c_{i_r},m)=d(c_{i_1},\dots,c_{i_r},m)+b'(c_{i_1},\dots,c_{i_r},m)$$

Lema 7.5. *Con las notaciones anteriores,*

- ∂^2 *=0*
- *La composición*

$$M\xrightarrow{\rho}C\otimes M \lessdot\!\!\hookrightarrow\!\xrightarrow{i} C(M)$$

es un morfismo en $Chain(C)$ *que además es un quasi-isomorfismo.*

Demostración: Consideremos el complejo extendido $\widehat{C}(M)=\oplus_{n\geq 0}C^{\otimes n}\otimes M$ con el diferencial definido por las mismas fórmulas que el de $C(M)$, y definamos el morfismo k-lineal

$$h=\begin{cases}\epsilon\otimes id_{C^{\otimes n-1}}\otimes id_M : C^{\otimes n}\otimes M\to C^{\otimes n-1}\otimes M & \text{si } n\geq 1\\ 0:M\to 0\end{cases}$$

Sabíamos de antes que $b'^2=0$, $b'h+hb'=id$, $d^2=0$.

Probaremos entonces dos identidades:

$$b'd+db'=0 \quad \text{y} \quad dh+hd=0$$

Veamos primero $b'd+db'=0$, lo que implica que $\partial^2=0$ pues $\partial^2=(b'+d)(b'+d)=b'^2+d^2+b'd+db'=b'd+db'$.

$$b'd(c_{i_1},\dots,c_{i_r},m)=(-1)^r\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{|c_{i_1}|+\dots+|c_{i_{k-1}}|}b'(c_{i_1},\dots,d(c_{i_k}),\dots,c_{i_r},m)$$

donde por convención, $c_{i_{r+1}}:=m$.

$$db'(c_{i_1},\dots,c_{i_r},m)=\sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{j+1}d(c_{i_1},\dots,\Delta(c_{i_j}),\dots,c_{i_r},m)$$

de nuevo usamos la convención $c_{i_{r+1}}=m$, y $\Delta(c_{i_{r+1}})=\rho^-(m)$. Vemos que ambas fórmulas dan una suma doble, para compararlas separaremos en tres tipos de términos:

$$db'(c_{i_1},\dots,c_{i_r},m)=$$

$$=\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+1}(-1)^{r+1}\left(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{|c_{i_1}|+\dots+|c_{i_{j-1}}|}(c_{i_1},\dots,d(c_{i_j}),\dots,\Delta(c_{i_k}),\dots,c_{i_r},m)+\right.$$

$$+(-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{k-1}}|}((c_{i_1},\ldots,(d\otimes 1)\Delta(c_{i_k}),\ldots,c_{i_r},m)+s.(c_{i_1},\ldots,(1\otimes d)\Delta(c_{i_k}),\ldots,c_{i_r},m))+$$
$$\left.+\sum_{j=k+1}^{r+1}(-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{j-1}}|}(c_{i_1},\ldots,\Delta(c_{i_k}),\ldots,d(c_{i_j}),\ldots,c_{i_r},m)\right)$$

Donde s es el operador multiplicación por menos uno en los grados impares y la identidad en los grados pares. Notar que como Δ es un morfismo graduado, la suma de los grados de cada factor de $\Delta(c_{i_j})$ es igual al grado de c_{i_j}.

Para el término del medio, utilizamos la identidad $\Delta d=(d\otimes 1)\Delta+s.(1\otimes d)\Delta$, válida tanto en C por ser C una coálgebra diferencial graduada, como en M (cambiando Δ por ρ^- y d por d_M) por ser M un C-comódulo diferencial graduado.

Cuando calculamos $b'd(c_{i_1},\ldots,c_{i_r},m)$ obtenemos:

$$b'd(c_{i_1},\ldots,c_{i_r},m)=\sum_{j=1}^{r+1}(-1)^r(-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{j-1}}|}b'(c_{i_1},\ldots,d(c_{i_j}),\ldots,c_{i_r},m)=$$

$$=\sum_{j=1}^{r+1}(-1)^r\left((-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{j-1}}|}\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k+1}(c_{i_1},\ldots,\Delta(c_{i_k}),\ldots,d(c_{i_j}),\ldots,c_{i_r},m)+\right.$$
$$+(-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{k-1}}|}(-1)^{j+1}(c_{i_1},\ldots,\Delta(d(c_{i_k})),\ldots,c_{i_r},m)+$$
$$\left.+(-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{j-1}}|}\sum_{k=j+1}^{r+1}(-1)^{k+1}(c_{i_1},\ldots,d(c_{i_k}),\ldots,\Delta(c_{i_j}),\ldots,c_{i_r},m)\right)$$

Comparando los términos centrales, vemos que en ambos casos son iguales salvo por un factor $(-1)^{r+1}$ en el caso de db' y un factor $(-1)^r$ para $b'd$. Los otros términos corresponden a una suma sobre los pares $1\leq j<k\leq r+1$ para el primer término de db' (resp. tercer término de $b'd$) y a una suma sobre los pares $1\leq k<j\leq r+1$ para el tercer término de db' (resp. primer término de $b'd$), y de nuevo ocurre el mismo fenómeno de signos, con lo cual, al realizar la suma $db'+b'd$ todos los términos se cancelan.

Veamos ahora que $hd+dh=0$:

Sean $c_{i_j}\in C_i$ para $j=1,\ldots,r$ y $m\in M_p$, y supongamos que $C_{i_1}\neq C_0$, entonces

$$dh(c_{i_1},\ldots,c_{i_r},m)=(-1)^{r-1}\epsilon(c_{i_1})d(c_{i_2},\ldots,c_{i_r},m)=0$$

pues ϵ es cero sobre todos los C_i salvo sobre C_0. Por otro lado

$$hd(c_{i_1},\ldots,c_{i_r},m)=h\left(\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{|c_{i_1}|+\cdots+|c_{i_{k-1}}|}(-1)^r(c_{i_1},\ldots,d_C(c_{i_k}),\ldots,c_{i_r},m)\right)$$

donde también hemos utilizado la convención $c_{i_{r+1}}:=m$. De esta suma, el primer término es cero porque $\epsilon\circ d=0$, los otros términos también son cero porque c_{i_1} es homogéneo y no pertenece a C_0, luego en este caso $hd+dh=0$.

Supongamos ahora $C_{i_1} = C_0$, luego $|c_{i_1}| = 0$, también tenemos que $\epsilon \circ d = 0$, pero sobreviven los términos con $\epsilon(c_{i_1})$, tenemos entonces que

$$dh(c_{i_1}, \dots, c_{i_r}, m) = (-1)^{|c_{i_1}|}\epsilon(c_{i_1})d(c_{i_2}, \dots, c_{i_r}, m) = \epsilon(c_{i_1})d(c_{i_2}, \dots, c_{i_r}, m)$$

Haciendo la cuenta en el otro sentido,

$$hd(c_{i_1}, \dots, c_{i_r}, m) =$$

$$h\left(\sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{|c_{i_1}|+\dots+|c_{i_k-1}|}(-1)^r(c_{i_1}, \dots, d_C(c_{i_k}), \dots, c_{i_r}, m)\right) =$$

$$= (-1)^r\sum_{k=2}^{r+1}(-1)^{|c_{i_2}|+\dots+|c_{i_{k-1}}|}\epsilon(c_{i_1})(c_{i_2}, \dots, d_C(c_{i_k}), \dots, c_{i_r}, m) =$$

$$= -\epsilon(c_{i_1})d(c_{i_2}, \dots, c_{i_r}, m)$$

Luego en este caso también $dh + hd = 0$.

Al demostrar $dh + hd = 0$ lo que hemos probado es que $\partial h + h\partial = 1$, pues $\partial h + h\partial = (b' + d)h + h(b' + d) = (b'h + hb') + (dh + hd) = 1 + 0$. Con esto hemos demostrado que el complejo $\widehat{C}(M)$ es acíclico, con lo cual vemos dos cosas al mismo tiempo: una es que $b'_0 = \rho : M \to C(M)$ es un morfismo de complejos, la segunda es que ese morfismo es un quasi-isomorfismo, pues $\widehat{C}(M)$ no es otra cosa que el cono de la aplicación anterior, y sabemos que una aplicación es un quasi-isomorfismo si y sólo si su cono es acíclico.

A partir del lema anterior, para cada $M \in Chain(C)$ hemos construído de manera funtorial un quasi-isomorfismo $M \to C(M)$ inducido por el morfismo de estructura $\rho^- : M \to C \otimes M$.

Para cada $M \in Chain(C)^+$ con C graduada positiva, el objeto $C(M)$ resultará un objeto cerrado, pero la demostración no es inmediata, sin embargo, las propiedades básicas de los objetos cerrados (suma arbitraria de objetos cerrados es cerrado, el cono de una aplicación entre objetos cerrados es nuevamente cerrado) pueden demostrarse a partir de este hecho, por lo que daremos una definición alternativa, que nos permitirá demostrar con facilidad estas propiedades fundamentales, y luego veremos que la nueva definición es equivalente a la definición anterior.

Definición 7.6. *Un objeto I en $Chain(C)$ se dice* **serrado** *sii el morfismo de estructura $\rho_I : I \to C \otimes I$ induce no sólo un quasi-isomorfismo, sino una equivalencia homotópica $I \sim C(I)$*

Proposición 7.7. *La clase de objetos serrados es estable por sumandos directos y por sumas directas. Más aún, si M es serrado y $V \in Chain(k)$, entonces $M \otimes V$ es serrado.*

Demostración: La parte de suma directa es consecuencia de que $C(\oplus_i I_i) = \oplus_i C(I_i)$. La parte de sumandos directos también es una consecuencia formal de que el funtor $C(-)$

conmuta con sumas directas. La última aserción se demuestra análogamente a las otras, se sigue de que $C(M \otimes V) = C(M) \otimes V$.

Observación: más tarde demostraremos que, (con las hipótesis de acotación adecuadas), las definiciones de serrado y cerrado son equivalentes, con lo cual, esta proposición implica que (por lo menos en esos casos) sumas arbitrarias de cerrados es cerrado.

Ejemplos:

1. C es serrado.

   Demostración: $C \to C \otimes C \subset C(C)$ tiene como vuelta $0 : C^{\otimes n} \to C$ si $n > 2$ y $1 \otimes \epsilon : C \otimes C \to C$. Notar que el morfismo es C-colineal a izquierda, la composición $C \to C(C) \to C$ es la identidad, la otra composición es $\Delta(1 \otimes \epsilon)$ en grado cero y cero en grados superiores. Esta flecha es homotópica a la identidad con homotopía $(-1)^n id^{\otimes n} \otimes \epsilon$.

2. Sea el comódulo diferencial graduado $C \otimes V$ donde V es un espacio vectorial diferencial graduado, entonces $C(C \otimes V) = C(C) \otimes V$, como $C \sim C(C)$ entonces $C \otimes V \sim C(C) \otimes V$ y por lo tanto $C \otimes V$ es serrado.

Lema 7.8. *Sea $f : M \to N$ un morfismo de complejos diferenciales graduados, entonces*

$$C(Co(f)) = Co(C(f))$$

Demostración: En cada grado, tenemos que $Co(f)_n = M_{n+1} \oplus N_n$, por el otro lado,

$$C(f)_n = (id^{\otimes *} \otimes f)_n : \left(\oplus_i C^{\otimes i} \otimes M\right)_n \to \left(\oplus_i C^{\otimes i} \otimes N\right)_n$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} Co(C(f))_n &= \left(\oplus C^{\otimes *} \otimes M\right)_{n+1} \oplus \left(C^{\otimes *} \otimes N\right)_n = \\ &= \left((\oplus C^{\otimes *} \otimes M[-1]) \oplus (\oplus C^{\otimes *} \otimes N)\right)_n = \\ &= \left(\oplus C^{\otimes *} \otimes (M[-1] \oplus N)\right)_n = C(Co(f))_n \end{aligned}$$

La verificación del diferencial es también inmediata.

Corolario 7.9. *Sea $f : M \to N$ un morfismo en $Chain(C)$ con M y N serrados, entonces $Co(f)$ es serrado.*

Demostración: se considera el morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} C(M) \arrow[r, "C(f)"] & C(N) \arrow[r] & C(Co(f)) \arrow[r] & C(M)[-1] \arrow[r] & \cdots \\ M \arrow[u, "\rho_M"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "\rho_N"] \arrow[r] & Co(f) \arrow[u, "\rho_{Co(f)}"] \arrow[r] & M[-1] \arrow[u, "\rho_{M[-1]}"] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Como ρ_M y ρ_N son equivalencias homotópicas, por el lema de los cinco aplicado a la sucesión exacta larga del $Hom_{\mathcal{H}}$ se deduce que $\rho_{Co(f)}$ también es una equivalencia homotópica.

Observación: El corolario anterior permite dar un argumento alternativo a la demostración de que sumandos directos de serrados son serrados:

Sea P un objeto en $Chain(C)$ tal que es un sumando directo de un objeto serrado, llamemos Q a un complemento de P, es decir, Q es tal que $P \oplus Q$ es un objeto serrado; llamemos I al objeto $P \oplus Q$. Tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to P \to (P \oplus Q \oplus P \oplus Q \oplus ...) \to (0 \oplus Q \oplus P \oplus Q \oplus ...) \to 0$$

que se parte como sucesión de C-comódulos graduados, y que es isomorfa a

$$0 \to P \to I^{(\mathbb{N})} \to I^{(\mathbb{N})} \to 0$$

Utilizando que sumas directas de serrados son serrados, como I es serrado también lo es $I^{(\mathbb{N})}$, luego, por la estabilidad de la noción de serrados por conos, P resulta serrado, como queríamos probar.

Lema 7.10. *Para todo $p > 0$ y todo $M \in Chain(C)$, $C(M)_p := (\oplus_{n=1}^{p} C^{\otimes n} \otimes M, d, b')$ es cerrado y serrado.*

Demostración: Notamos que tanto la noción de ser "serradoçomo la de ser "cerrado"es estable por conos (Corolario 7.9 para version 's', versión 'c' es clara). Para el caso $p = 1$, tenemos que $C(M)_1 = C \otimes M$ y este objeto es tanto serrado como cerrado (ejemplo 2 de serrados y Lema 7.4 respectivamente). Inductivamente, si suponemos $C(M)_p$ serrado (resp. cerrado), utilizando la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to C^{\otimes p+1} \otimes M \to C(M)_{p+1} \to C(M)_p \to 0$$

Al ser $C^{\otimes p+1} \otimes M = C \otimes (C^{\otimes p} \otimes M)$ serrado para todo p (ejemplo 2 de serrados, resp. cerrado: Lema 7.4) y como $C(M)_1 = C \otimes M$ es también serrado (y cerrado), entonces $C(M)_p$ es serrado (resp. cerrado) para todo p, ya que tanto la noción de serrado como la de cerrado es estable por triángulos, y esta sucesión forma un triángulo pues se parte en la categoría de C-comódulos graduados (dado que un comódulo de la forma $C \otimes V$ es un objeto inyectivo en la categoría de C-comódulos graduados).

La resolución standard $C(M) = Tot(\oplus_{n \geq 1} C^{\otimes n} \otimes M, d, b')$, cuando C está graduada positiva y $M \in Chain(C)^+$, se consigue por un proceso de límite inverso de complejos truncados según la filtración dada por la cantidad de factores de C: $C(M)_p = Tot(\oplus_{p \geq n \geq 1} C^{\otimes n} \otimes M, d, b')$, pero este límite inverso está tomado en la categoría $Chain(C)$, y no en $\mathcal{H}(C)$ ni en $\mathcal{D}(C)$, por lo tanto no es posible deducir de manera inmediata que $C(M)$ sea cerrado a partir de que cada $C(M)_p$ lo sea.

7.4. Límites inversos

Sea U un objeto en $Chain(C)$, donde C es una coálgebra diferencial graduada.

Si $U^{,j}$ es el complejo truncado en j, o sea

$$(U^{,j})_i = \begin{cases} U_i & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

con el diferencial pasado al cociente (o sea el mismo en los grados menores a j y cero en el resto), entonces, el límite inverso del sistema proyectivo $\{U^{,j+1} \to U^{,j}\}_{j\geq 0}$ existe y coincide con U, puesto que para definir un morfismo de complejos $X \to U$ basta definirlo grado a grado, y esta información ciertamente se consigue definiendo los morfismos hasta el complejo truncado en grado j, para todo j. Notar que por más que $U \in Chain(C)$, en general $U^{,j} \in Chain(k)$.

Por otro lado, se tiene un morfismo inyectivo $\lim\limits_{\to j} Hom_{Ch(k)}(U^{,j}, X) \to Hom_{Ch(k)}(U, X)$ cuya imagen consiste exactamente en los morfismos de complejos $f : U \to X$ tales que sus componentes $f_p : U_p \to X_p$ se anulan para $p \gg 0$. Luego, si $X_p = 0$ para $p \gg 0$ tenemos que

$$Hom_{Ch(k)}(U, X) = \lim_{\to j} Hom_{Ch(k)}(U^{,j}, X)$$

Además de este tipo particular de sistemas inversos, hay otros sistemas un poco menos restrictivos (con propiedades análogas con respecto al Hom) que pasamos a describir:

Sea ahora $\{U_n\}_{n\geq 0}$ un sistema inverso de complejos en $Chain(C)$ con la siguiente propiedad: para todo j, existe un $n_0(j)$ tal que $U_n^{,j} \to U_{n+1}^{,j}$ es el morfismo identidad siempre que $n \geq n_0(j)$. A un tal sistema lo llamaremos **sistema inverso localmente finito**.

Ejemplo: Sea $M \in Chain(C)^+$ (i.e. $M \in Chain(C)$ y $M_p = 0$ para $p \ll 0$), donde C es una coálgebra diferencial graduada positiva. Consideramos $C(M) = \oplus_{n\geq 1} C^{\otimes n} \otimes M$ y $C(M)_p = \oplus_{n=1}^{p} C^{\otimes n} \otimes M$, entonces $\{C(M)_p\}_{p\geq 1}$ es un sistema inverso localmente finito, su límite inverso coincide con $C(M)$.

Una propiedad interesante de los sistemas inversos localmente finitos es su relación con el Hom en la primera variable:

Lema 7.11. *Sea $\{U_n\}_{n\geq 0}$ un sistema inverso localmente finito en $Chain(C)^+$, llamemos U a su límite inverso, luego, para cada objeto W de $Chain(C)^b$ (donde $Chain(C)^b$ denota a la subcategoría plena de $Chain(C)$ que consiste en los objetos W tales que $W_p = 0$ para $|p| \gg 0$). Se tiene un sistema directo $\{Hom_{Ch(C)}(U_n, W)\}_{n\geq 0}$, y es válida la igualdad*

$$Hom_{Ch(C)}(U, W) = \lim_{\to n} Hom_{Ch(C)}(U_n, W)$$

Demostración: Dado un sistema compatible $f_n : U_n \to W$, observamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U_{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr, "f_{n+1}"'] & & U_n \arrow[dl, "f_n"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Como $W \in Chain(C)^b$, existe $j' \in \mathbb{N}$ tal que $W_j = 0$ para todo $j \geq j'$, luego todas las $(f_n)_j : (U_n)_j \to W_j$ son cero. Por otro lado, dado este j', como $\{U_n\}$ es un sistema localmente finito, existe un $n_0(j')$ tal que las componentes menores o iguales $n_0(j')$ de los morfismos $U_{n+1} \to U_n$ son la identidad (para todo $n \geq n_0$). De la conmutatividad del diagrama anterior, se sigue que todas las f_n son iguales para $n \geq n_0$, luego

$$Hom_{Ch(C)}(U, W) = Hom_{Ch(C)}(\lim_{\leftarrow n} U_n, W) =$$

$$= Hom_{Ch(C)}(U_{n_0}, W) = \lim_{\to n} Hom_{Ch(C)}(U_n, W)$$

Otra propiedad fundamental de los límites inversos localmente finitos es su conmutatividad con el producto cotensorial, para demostrar esto, primero necesitaremos un lema de conmutatividad de estos límites con el producto tensorial sobre el cuerpo de base:

Lema 7.12. *Sea $X \in Chain(k)^+$ y $\{U_n\}_{n\geq 0}$ un sistema localmente finito en $Chain(k)^+$, entonces*

$$\lim_{\leftarrow n}(X \otimes U_n) = X \otimes U$$

Demostración: En primer lugar, si Y es un objeto cualquiera en $Chain(k)^+$, como $(X \otimes Y)_r = \oplus_{p+q=r} X_p \otimes Y_q$, tenemos que $X \otimes Y = \lim_{\leftarrow j} X \otimes Y^{,j}$. Entonces

$$X \otimes U = X \otimes \lim_{\leftarrow j} U^{,j} = \lim_{\leftarrow j}(X \otimes U^{,j}) =$$

$$= \lim_{\leftarrow j}(X \otimes \lim_{\leftarrow n} U_n^{,j})$$

Como para cada j, el sistema $\{X \otimes U_n^{,j}\}_{n\geq 0}$ se estaciona a partir de $n_0(j)$, entonces su límite es igual a $X \otimes U_{n_0(j)}^{,j}$, por lo tanto podemos remplazar $X \otimes \lim_{\leftarrow n} U_n^{,j}$ por $X \otimes U_{n_0(j)}^{,j} = \lim_{\leftarrow n}(X \otimes U_n^{,j})$ y obtener

$$\lim_{\leftarrow j}(X \otimes \lim_{\leftarrow n} U_n^{,j}) = \lim_{\leftarrow j}(\lim_{\leftarrow n} X \otimes U_n^{,j}) =$$

$$= \lim_{\leftarrow n}(\lim_{\leftarrow j} X \otimes U_n^{,j}) = \lim_{\leftarrow n}(X \otimes U_n)$$

como queríamos probar.

Proposición 7.13. *Sea ${}_D X_C$ un elemento de $Chain(D \otimes C^{op})^+$ y $\{U_n\}_{n\geq 0}$ un sistema inverso localmente finito en $Chain(C)^+$. Consideremos el funtor*

$$F := X \square_C - : Chain(C)^+ \to Chain(D)^+$$

$$M \mapsto X \square_C M$$

Entonces $F(U_n)$ es un sistema localmente finito en $Chain(D)^+$ y $\lim_{\leftarrow} F(U_n) = F\left(\lim_{\leftarrow} U_n\right)$

Demostración: Por la definición de producto cotensorial, para cada n, se tiene una sucesión exacta

$$0 \to F(U_n) \to X \otimes U_n \to X \otimes C \otimes U_n$$

Como el límite inverso es exacto a izquierda, se tiene una sucesión exacta para $\varprojlim F(U_n)$, y aplicando el lema anterior se tiene un morfismo de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim_n F(U_n) \arrow[r] & \varprojlim_n (X \otimes U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varprojlim_n (X \otimes C \otimes U_n) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & X \square_C \varprojlim_n U_n \arrow[r] & X \otimes \varprojlim_n U_n \arrow[r] & X \otimes C \otimes \varprojlim_n U_n
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\varprojlim_n F(U_n) \cong X \square_C \varprojlim_n U_n = F(\varprojlim_n U_n)$

El sistema inverso que aparecerá con más frecuencia será el asociado a la resolución standard. Los siguientes lemas tienen en vista ser aplicados a estos límites en particular:

Lema 7.14. *Sea $p_{n+1} : M_{n+1} \to M_n$ un sistema inverso ($M_p = 0$ para $p < 0$) en $Chain(C)$ tal que existen secciones $s_n : M_n \to M_{n+1}$ en donde los s_n son morfismos graduados y C-colineales, llamemos $M = \varprojlim M_n$. Entonces la siguiente sucesión*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_n M_n \xrightarrow{f} \prod_n M_n \longrightarrow 0$$

donde $f(\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{m_n - p_{n+1}(m_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$, forma parte de un triángulo en $\mathcal{H}(C^*)$, si los productos son tomados en $Chain(C)$, entonces esa sucesión sigue siendo exacta corta y forma parte de un triángulo en $\mathcal{H}(C)$.

Demostración: Demostraremos la parte del enunciado concerniente a C^*, la parte de $\mathcal{H}(C)$ es idéntica, lo único que hay que ver es que los morfismos que aparecen están bien definidos.

Está claro que M se identifica con el núcleo de f, veamos que f es suryectiva:

Si $m = (m_0, m_1, m_2, \dots) \in \prod_n M_n$,queremos encontrar $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ tal que $f(x) = m$. Si $m_0 = f(x)_0 = (x_0 - p_1(x_1))$, podemos tomar $x_0 = m_0$ y $x_1 \in Ker(p_1)$, por ejemplo $x_1 = 0$. Luego si $m_1 = f(x)_1 = -p_2(x_2)$, hay que elegir x_2 tal que $p_2(x_2) = -m_1$, como p_2 es un epimorfismo (admite una sección), esto siempre es posible, elegimos por ejemplo $x_2 = -s_1(m_1)$. En general, suponiendo que hemos encontrado un elemento $x^n = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ tal que $f(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)_p = m_p$ si $p = 0, \dots, n-1$. Se quiere encontrar un x_{n+1} tal que $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, 0, \dots)_n = m_n$. Como $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, 0, \dots)_n = x_n - p_{n+1}(x_{n+1})$, basta tomar $x_{n+1} = s_n(x_n - m_n)$. Con esta definición inductiva, vemos que $f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (m_0, m_1, m_2, \dots)$, es decir, que f es un epimorfismo. Más explícitamente, vemos que

$$x = (m_0, 0, -s_1(m_1), -s_2 s_1(m_1) - s_2(m_2), -s_3 s_2 s_1(m_1) - s_3 s_2(m_2) - s_3(m_3), \dots)$$

La aplicación

$$(m_0, m_1, m_2, \dots) \mapsto (m_0, 0, -s_1(m_1), -s_2s_1(m_1) - s_2(m_2), -s_3s_2s_1(m_1) - s_3s_2(m_2) - s_3(m_3), \dots)$$

es graduada y C^*-lineal (pues s es graduado y C^*-lineal), por lo tanto tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \prod_n M_n \xrightarrow{f} \prod_n M_n \longrightarrow 0$$

se parte en la categoría de C^*-módulos graduados, luego (ejemplo luego de Proposición 6.3), esa sucesión exacta corta es parte de un triángulo en $\mathcal{H}(C^*)$.

Ejemplo: Sea $M \in \mathit{Chain}(C)^+$ donde C es una coálgebra diferencial graduada positiva. Sea $C(M)_n = \left(\oplus_{p=1}^n C^{\otimes p} \otimes M, d_{C^{\otimes *} \otimes M} + b'\right)$ y $p_{n+1} : C(M)_{n+1} \to C(M)_n$ la proyección natural. Como C-comódulo graduado tenemos que $C(M)_{n+1} = C(M)_n \oplus C^{\otimes n+1} \otimes M$, por lo tanto la proyección p_{n+1} se parte como C-comódulos graduados. Por las hipótesis de acotación de M y de C tenemos que $C(M) = Tot^{\oplus}(\oplus_{n \in \mathbb{N}} C^{\otimes n} \otimes M, d, b') = Tot^{\prod}(\oplus_{n \in \mathbb{N}} C^{\otimes n} \otimes M, d, b') = \lim\limits_{\leftarrow} C(M)_n$, por lo tanto se está en las condiciones del lema anterior y tenemos que

$$0 \to C(M) \to \prod_n C(M)_n \to \prod_n C(M)_n \to 0$$

es un triángulo en $\mathcal{H}(C^*)$.

7.5. Sobre cerrados y serrados

El objetivo de esta subsección es demostrar que $C(M)$ es un objeto cerrado, por lo menos para los objetos $M \in \mathit{Chain}(C)^+$ con C una coálgebra graduada positiva.

Lema 7.15. *Sea $\{U \to \dots U_n \to^{p_n} U_{n-1} \to \dots\} \in \mathit{Chain}(C)$ un sistema inverso en $\mathit{Chain}(C)$ tal que*

$$(\dagger) \qquad 0 \to U \to \prod_n U_n \to^f \prod_n U_n \to 0$$

es un triángulo en $\mathcal{H}(C^*)$, en donde la flecha f es

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{u_n - p_{n+1}(u_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$$

y supongamos que existe un $Z \in \mathit{Chain}(C)$ tal que $Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U) = 0$.

Demostración: usando la sucesión exacta larga inducida por el triángulo (†) luego de aplicar el funtor $Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, -)$, tenemos el isomorfismo de sucesiones exactas largas:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z,U) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, \prod_n U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, \prod_n U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z,U) \arrow[r] & \prod_n Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U_n) \arrow[r] & \prod_n Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U_n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

como cada $Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U_n) = Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U_n) = 0$ también es cero el producto, y por lo tanto $Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U) = Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U) = 0$.

Teorema 7.16. *Sea C una coálgebra diferencial graduada positiva; sea $M \in Chain(C)^+$ un objeto cualquiera y $X \in Chain(C)$ un objeto acíclico, entonces*

$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(M)) = 0$$

Demostración: $C(M) = \varprojlim C(M)_n$, luego, por el lema anterior basta ver que $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(M)_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y esto es cierto por el Lema 7.10.

Corolario 7.17. *Sea C una coálgebra diferencial graduada positiva. Para cualquier par de objetos $M \in Chain(C)$, $N \in Chain(C)^+$,*

$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(N)) = Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C(N))$$

es decir, $C(N)$ es cerrado.

Demostración: primero veremos que la aplicación de localización es sobreyectiva, luego veremos que es inyectiva.

Suryectividad: Sea $fr^{-1} \in Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C(N))$ donde $f : M \to C(N)$ y $r : M \to X$ es un quasi-isomorfismo, luego $Co(r)$ es acíclico. Por la sucesión exacta larga del $Hom_{\mathcal{H}(C)}(-, C(N))$ tenemos que $r^* : Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(N)) \cong Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(N))$, por lo tanto existe $g : X \to C(N)$ tal que $r^*[g] = [f]$. Como $r^*[g] = [gr]$, entonces $fr^{-1} = grr^{-1} = g$ (igualdad en $\mathcal{D}(C)$), o sea, que el elemento fr^{-1} proviene de la clase de g en $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(N)) \cong Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(N))$.

Inyectividad: Sea $[f] \in Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(N))$ tal que $f.id^{-1} = 0$ en $\mathcal{D}(C)$, queremos ver que $[f] = 0 \in \mathcal{H}(C)$. Recordamos que en $\mathcal{D}(C)$, dados X, Y dos objetos, dos flechas

$$fs^{-1} : X \xleftarrow{s} X_1 \xrightarrow{f} Y$$

$$gr^{-1} : X \xleftarrow{r} X_2 \xrightarrow{g} Y$$

son iguales ($r,\ s$ son quasi-isomorfismos) en caso de que exista un tercer objeto X_3 y morfismos completando conmutativamente el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X_3 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\
& X_2 \arrow[ul, "l"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha hacia la izquierda $X_3 \to X$ es un quasi-isomorfismo.

En el caso $f.id^{-1} = 0$, debemos tener un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "f"] & \\
M \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & X \arrow[l, "h'"'] \arrow[u, "h"'] \arrow[r, "h'''"] \arrow[d, "h''"] & C(N) \\
& M \arrow[ur, "0"] &
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del diagrama fuerza a que $h = h' = h''$ (que es un quasi-isomorfismo) y a que $h''' = 0$.

Se tiene $fh = 0$, y h es un quasi-isomorfismo; pero en la demostracion del párrafo anterior vimos que cada vez que tenemos un quasi-isomorfismo $h : X \to M$, $h^* : Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(N)) \to Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(N))$ es un isomorfismo, como $h^*[f] = [fh] = 0$ concluimos que $[f] = 0$, lo que concluye la demostración de inyectividad.

7.6. Equivalencia de las definiciones "cerrado" y "serrado"

Consideremos C una k-coálgebra diferencial graduada positiva y supongamos que tenemos un $M \in Chain(C)^+$ tal que $M \sim C(M)$ (donde $\sim$ indica 'es equivalente homotópico a'). Entonces $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, M) \cong Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(M))$, pero como ahora sabemos que $C(M)$ es cerrado para todo $M \in Chain(C)^+$, entonces $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, C(M)) \cong Hom_{\mathcal{D}(C)}(X, C(M)) \cong Hom_{\mathcal{D}(C)}(X, M)$ (la última igualdad se debe al hecho general de que siempre M es quasi-isomorfo a $C(M)$. Por lo tanto hemos demostrado "serrado $\Rightarrow$ cerrado".

Consideremos ahora un objeto cerrado $M \in Chain(C)^+$, es decir, un objeto que verifica $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, M) = Hom_{\mathcal{D}(C)}(X, M)$ para todo objeto X. Consideramos el quasi-isomorfismo $\rho_M : M \to C(M)$, entonces para $X = M$ obtenemos que $[\rho] \in Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(M))$, buscamos un morfismo $[f] \in Hom_{\mathcal{H}(C)}(C(M), M)$ tal que $f\rho \sim id_M$ y $\rho f \sim id_{C(M)}$. Consideramos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(M)) \arrow[r, equal] & Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C(M)) \\
Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, M) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho_*"] & Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, M) \arrow[u, "\rho_*"] \\
Hom_{\mathcal{H}(C)}(C(M), M) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho^*"] & Hom_{\mathcal{D}(C)}(C(M), M) \arrow[u, "\rho_*"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, C(M)) \arrow[r, equal] & Hom_{\mathcal{D}(C)}(M, C(M)) \\
Hom_{\mathcal{H}(C)}(C(M), C(M)) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho^*"] & Hom_{\mathcal{D}(C)}(C(M), C(M)) \arrow[u, "\rho^*"] \\
Hom_{\mathcal{H}(C)}(C(M), M) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho_*"] & Hom_{\mathcal{D}(C)}(C(M), M) \arrow[u, "\rho^*"]
\end{tikzcd}$$

En donde sabemos que tanto ρ^* como ρ_* del lado de los $Hom_{\mathcal{D}(C)}$ son isomorfismos. Las igualdades horizontales se deben, a que $C(M)$ es (siempre) cerrado, o bien a que M es (por hipótesis) cerrado.

Considerando $[id] \in Hom_{\mathcal{H}(C)}(M, M)$, sabemos que está en la imagen de ρ^*, por lo tanto existe $[g] \in Hom_{H(C)}(C(M), M)$ tal que $[id_M] = \rho^*([g]) = [g\rho] = [g][\rho]$. Si ahora consideramos $[id_{C(M)}] \in Hom_{\mathcal{H}(C)}(C(M), C(M))$, como ρ_* es un isomorfismo, existe $[g'] \in Hom_{\mathcal{H}(C)}(C(M), M)$ tal que $[id_{C(M)}] = \rho_*([g]) = [\rho g'] = [\rho][g']$.

Ahora es un ejercicio elemental ver que si una flecha tiene inverso a izquierda $[g]$ e inverso a derecha $[g']$, entonces $[g] = [g']$ ya que $[g] = [g].id_{C(M)} = [g]([\rho][g']) = ([g][\rho])[g'] = id_M[g'] = [g']$, o sea que g es un inverso homotópico de ρ.

Como resultado de lo anterior, de manera automática todas las propiedades de los serrados son ciertas para los cerrados, como por ejemplo ser una clase de $Chain(C)^+$ cerrada por sumas directas arbitrarias.

Corolario 7.18. *Sea C una coálgebra diferencial graduada positiva, $M \in Chain(C)^+$ un objeto cerrado y $V \in Chain(k)^+$, entonces $M \otimes V$ es cerrado.*

Demostración: Usando la equivalencia de las dos definiciones, basta probar que $M \otimes V \sim C(M \otimes V)$, pero esto es una consecuencia de que $M \sim C(M)$ y que $C(M \otimes V) = C(M) \otimes V$.

Como segunda aplicación, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 7.19. *Sea C una coálgebra diferencial graduada positiva, $\mathcal{H}_c(C)^+$ la subcategoría plena de $\mathcal{H}(C)$ consistente en los objetos de $Chain(C)^+$ que son cerrados, entonces $\mathcal{D}(C)^+$ es equivalente a $\mathcal{H}_c(C)^+$*

Demostración: Consideremos la restricción a $\mathcal{H}_c(C)^+$ del funtor localización $\mathcal{H}(C)^+ \to \mathcal{D}(C)^+$. Por definición de objeto cerrado, este funtor restringido es biyectivo en el Hom, para ver que es una equivalencia falta ver que es quasi-suryectivo.

Dado $M \in \mathcal{D}(C)^+$, sabemos que $C(M)$ es un objeto cerrado, y que es quasi-isomorfo a M, luego tenemos un isomorfismo en $\mathcal{D}(C)^+$ entre M y $C(M)$, por lo tanto todo objeto en $\mathcal{D}(C)^+$ es isomorfo a un objeto de la imagen del funtor en cuestión. De hecho, lo que hemos definido es un funtor $C(-) : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{H}_c(C)^+$ que es inverso a la restricción de la localización $\mathcal{H}_c(C)^+ \to \mathcal{D}(C)^+$.

Como extensión de las propiedades ya vistas en la categoría $Chain(C)$ de los límites inversos localmente finitos, demostraremos los siguientes lemas, que serán de utilidad en la caracterización de las equivalencias derivadas:

Enunciamos sin demostración el siguiente lema de álgebra homológica:

Lema 7.20. *Sea $\mathcal{C}$ una de las siguientes categorías: $Chain(C)$, $Chain(A)$, o $Chain(\mathcal{A})$, donde respectivamente C es una coálgebra diferencial graduada, A es un álgebra diferencial graduada, o $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana. Llamemos $H_* : \mathcal{C} \to {}^{\mathbb{Z}}\mathcal{A}b$ al funtor homología, y sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un sistema directo dirigido (i.e., para todo $i, j \in I$, $\exists k \in I$ tal que $k \geq i$ y $k \geq j$. Entonces $H_*(\lim\limits_{\to I} V_i) = \lim\limits_{\to I} H_*(V_i)$. (en el caso en que $\mathcal{C} = Chain(\mathcal{A})$, asumimos como hipótesis adicional que $\lim\limits_{\to I} V_i$ existe)*

Lema 7.21. *Sea $X \in Chain(C)^b$, $F : Chain(C)^+ \to Chain(D)^+$ un funtor que conmuta con límites inversos localmente finitos y $F(X) \in Chain(D)^b$). Sea $V = \lim\limits_{\leftarrow i} V_i \in Chain(C)^+$ tal que para cada i, F induce un isomorfismo:*

$$F : Hom_{\mathcal{H}(C)}(V_i, X) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(V_i), F(X))$$

entonces F induce un isomorfismo en el límite

$$F : Hom_{\mathcal{H}(C)}(V, X) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(V), F(X))$$

Demostración: Dados dos complejos $Y,\ Z\ \in Chain(C)$, denotamos por $\mathcal{H}om_C(Y,Z)_*$ al complejo Hom (para la definición ver por ejemplo [Har 66]). Este complejo en cada grado está dado por

$$\mathcal{H}om_C(Y,Z)_n = Hom_{Ch(C)}(Y, Z[n])$$

Si calculamos la cohomología de este complejo en grado cero obtenemos

$$H^0\left(\mathcal{H}om_C(Y,Z)_*\right) = \frac{\text{morfismos en } Chain(C)}{\text{homotopías}} = Hom_{\mathcal{H}(C)}(Y,Z)$$

Con la ayuda de este complejo, tenemos que

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{H}(C)}(V,X) =&\ \ H^0(\mathcal{H}om_C(V,X)) \\
=&\ \ H^0(\mathcal{H}om_C(\lim_{\leftarrow i} V_i, X)) \\
=&\ \ H^0(\lim_{\rightarrow i} \mathcal{H}om_C(V_i, X)) \\
=&\ \ \lim_{\rightarrow i} H^0(\mathcal{H}om_C(V_i, X)) \\
=&\ \ \lim_{\rightarrow i} Hom_{\mathcal{H}(C)}(V_i, X) \\
=&\ \ \lim_{\rightarrow i} Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(V_i), F(X)) \\
=&\ \ \lim_{\rightarrow i} H^0(\mathcal{H}om_D(F(V_i), F(X))) \\
=&\ \ H^0(\lim_{\rightarrow i} \mathcal{H}om_D(F(V_i), F(X))) \\
=&\ \ H^0(\mathcal{H}om_D(\lim_{\leftarrow i} F(V_i), F(X))) \\
=&\ \ H^0(\mathcal{H}om_D(F(\lim_{\leftarrow i} V_i), F(X))) \\
=&\ \ H^0(\mathcal{H}om_D(F(V), F(X))) \\
=&\ \ Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(V), F(X))
\end{aligned}$$

Lema 7.22. *Sea $F : Chain(C) \to Chain(D)$ un funtor y $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema inverso en $Chain(C)$ tal que las sucesiones exactas*

$$0 \to U \to \prod_n U_n \to \prod_n U_n \to 0$$

$$0 \to F(U) \to \prod_n F(U_n) \to \prod_n F(U_n) \to 0$$

(los productos están tomados en las categorías $Chain(C^*)$ y $Chain(D^*)$ respectivamente) son triángulos en $\mathcal{H}(C^*)$ y $\mathcal{H}(D^*)$, donde $U = \varprojlim U_n$. Supongamos además que para cada n, F induce un isomorfismo $F : Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U_n) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(Z), F(U_n))$, entonces

$$F : Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(Z), F(U))$$

Demostración: Utilizaremos las inmersiones de categorías $Chain(C) \to Chain(C^*)$, $Chain(D) \to Chain(D^*)$, $\mathcal{H}(C) \to \mathcal{H}(C^*)$ y $\mathcal{H}(D) \to \mathcal{H}(D^*)$. Recordamos que si $X,\ Y \in Chain(C)$, entonces $Hom_{Ch(C)}(X, Y) = Hom_{Ch(C^*)}(X, Y)$, por lo tanto (puesto que las homotopías también son morfismos en *Chain* con la graduación cambiada) $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X, Y) = Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(X, Y)$.

Aplicando el funtor $Hom_{\mathcal{H}}$, a partir de los triángulos de hipótesis se tienen morfismos de sucesiones exactas largas:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, \prod_n U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, \prod_n U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U) \arrow[r] \arrow[d, "F"] & \prod_n Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \prod_n Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_{\mathcal{H}(D^*)}(F(Z), F(U)) \arrow[r] & \prod_n Hom_{\mathcal{H}(D^*)}(F(Z), F(U_n)) \arrow[r] & \prod_n Hom_{\mathcal{H}(D^*)}(F(Z), F(U_n)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por el lema de los cinco, $F : Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U) \cong Hom_{\mathcal{H}(D^*)}(F(Z), F(U))$, pero como Z y U son objetos de $Chain(C)$ y $F(U),\ F(Z) \in Chain(D)$, entonces $F : Hom_{\mathcal{H}(C)}(Z, U) = Hom_{\mathcal{H}(C^*)}(Z, U) \cong Hom_{\mathcal{H}(D^*)}(F(Z), F(U)) = Hom_{\mathcal{H}(D)}(F(Z), F(U))$.

El ejemplo de aplicación de este lema será cuando cada morfismo $U_{n+1} \to U_n$ se parta como morfismo de C-comódulos graduados y F esté definido no sólo sobre $Chain(C)^+$ sino sobre la categoría todos los de C-comódulos graduados, luego $F(U_{n+1}) \to F(U_n)$ se partirá como morfismo de D-comódulos graduados, y la extensión de la Proposición 6.3 asegurará la "triangularidad"de la sucesión exacta del reciente lema.

Para un correcto enunciado del teorema de caracterización de equivalencias de esta sección, estableceremos la siguiente terminología:

Definición 7.23. *Sea C una k-coálgebra diferencial graduada y $\mathcal{C}$ una subcategoría de $Chain(C)^+$.*

1. *$\mathcal{C}$ se dirá* **estable por quasi-isomorfismos** *en caso de que para todo quasi-isomorfismo $f : M \to N$ con M y N objetos de $Chain(C)^+$, $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si $N \in \mathcal{C}$.*

2. *$\mathcal{C}$ se dirá* **estable por sumas directas arbitrarias** *en caso de que, dado un objeto $M \in Chain(C)^+$, si $M = \oplus_{i \in I} M_i$, entonces $M \in \mathcal{C}$ si y sólo si todo $M_i \in \mathcal{C}$, consideraciones similares para el producto.*

3. *$\mathcal{C}$ se dirá* **estable límites inversos que verifican las hipótesis de la Proposición 6.3** *(versión generalizada en el ejemplo) en caso de que para todo sistema inverso $\{U_n\}_n$ satisfaciendo las hipótesis de la mencionada Proposición, con $U_n \in \mathcal{C}$ para todo n y $U := \lim_{\leftarrow n} U_n \in Chain(C)^+$, entonces $U \in \mathcal{C}$. Se utilizará terminología similar para los límites inversos localmente finitos.*

4. *$\mathcal{C}$ se dirá* **estable por extensiones por objetos de** *$Chain(k)^+$ si y sólo si para cualquier $V \in Chain(k)^+$, $M \in \mathcal{C}$ implica $M \otimes V \in \mathcal{C}$.*

Enunciamos y demostramos un teorema de caracterización de equivalencias derivadas, que puede ser visto como la versión dual de un Teorema de B. Keller que caracteriza equivalencias entre categorías derivadas de módulos [Ke 94b]:

Teorema 7.24. *Sean C y D dos k-coálgebras diferenciales graduadas positivas, $C \in Chain(k)^b$, sea ${}_DX_C \in Chain(D \otimes C^{op})^b$ un objeto cerrado en $Chain(D)$ y consideremos $F = X\square_C^R - : \mathcal{D}^+(C) \to \mathcal{D}^+(D)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F es una equivalencia,*
2. a) *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, F induce una biyección en $Hom_{\mathcal{D}(C)}(C, C[n]) \cong Hom_{\mathcal{D}(D)}(X, X[n])$*
   b) *F conmuta con productos arbitrarios.*
   c) *La (menor) subcategoría de $Chain(D)^+$ que es estable por quasi-isomorfismos, extensiones por objetos de $Chain(k)^+$, conos, traslaciones y productos, que contiene a X, contiene a D.*

Demostración: Claramente las condiciones *(a)* y *(b)* son necesarias, para ver la necesidad de *(c)*, notamos que la menor subcategoría de $Chain(C)^+$ estable por quasi-isomorfismos, extensiones por elementos de $Chain(k)^+$, conos, traslaciones y productos, que contiene a C es $Chain(C)^+$. Al ser F una equivalencia, $D \in Chain(D)^+$, D está en la imagen de F y por lo tanto es quasi-isomorfo a algún objeto de la forma $X\square_C^R Y$. Como C "genera"$Chain(C)^+$, luego C "genera.ª Y, y por lo tanto X "genera.ª D pues $X\square_C^R C = X$ y $X\square_C^R - := C(X)\square_C -$ preserva conos, extensiones por objetos de $Chain(k)^+$ (i.e. $F(M \otimes V) = F(M) \otimes V$ para cualquier $M \in Chain(C)^+$ y $V \in Chain(k)^+$), traslaciones, productos y quasi-isomorfismos.

Para ver la suficiencia demostraremos que F es biyectivo en el Hom y quasi-suryectivo. La demostración de este teorema sigue las líneas de los resultados de B. Keller sobre equivalencias de categorías derivadas de módulos diferenciales graduados sobre álgebras diferenciales graduadas.

Ver que F es quasi-suryectivo es consecuencia de *(b)* y *(c)* pues $X = F(C)$, por lo tanto X está en la imagen de F. También es claro que F conmuta con extensiones por objetos de $Chain(k)^+$, conos, traslaciones y productos, por lo tanto la imagen de F contiene a D. Ahora bien, como todo $M \in Chain(D)$ es quasi-isomorfo a su resolución standard $D(M)$, basta ver que $D(M)$ sea quasi-isomorfo a alguien en la imagen de F. A su vez, la resolución standard, si $M \in Chain(D)^+$, es parte de un triángulo en donde los otros dos objetos son productos de $D(M)_n$, como F conmuta con conos y con productos, basta ver que cada $D(M)_n$ está en la imagen de F. Inductivamente, como se tiene un cono con $D \otimes M$, $D(M)_{n+1}$ y $D(M)$, basta ver que $D \otimes M$ esté en la imagen de F, pero esto es cierto pues D está, y las extensiones por objetos de $Chain(k)^+$ también.

Para ver que F sea una biyección en el Hom se razona de la siguiente manera:

Consideremos $\mathcal{C}_1$ la subcategoría plena de $Chain(C)^+$ formada por los objetos U tales que

$$F : Hom_{\mathcal{D}(C)}(U, C[n]) \cong Hom_{\mathcal{D}(D)}(F(U), X[n])$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Claramente $\mathcal{C}_1$ es estable por quasi-isomorfismos, traslaciones, conos y sumas directas. Dado que, tanto $C[n]$ como $X[n]$ son acotados de los dos lados, $F(C) = X$ y ambos son cerrados, por el Lema 7.21 se sigue que $\mathcal{C}_1$ es estable por límites inversos localmente finitos, luego esta subcategoría coincide con $Chain(C)^+$.

Consideremos $\mathcal{C}_2$ ahora la subcategoría de $Chain(C)^+$ formada por los objetos U tales que

$$F : Hom_{\mathcal{D}(C)}(V, U) \cong Hom_{\mathcal{D}(D)}(F(V), F(U))$$

para todo V en $\mathcal{D}(C)^+$. Cambiando V por $V[n]$ vemos que $\mathcal{C}_2$ es estable por traslaciones, por lo anterior contiene a C, también es claro (lema de los 5) que es estable por quasi-isomorfismos, conos y sumandos directos. Por el Lema 7.22 es estable por sistemas inversos que verifiquen las hipótesis de dicho lema.

Veremos ahora que $C \otimes V \in \mathcal{C}_2$ para todo espacio vectorial diferencial graduado V, con $V_p = 0$ para $p \ll 0$.

Como $C \otimes V = \varprojlim_j C \otimes V_j$ siendo V_j el espacio vectorial diferencial graduado truncado en grados mayores que j, y este límite verifica las condiciones del Lema 7.22, basta ver que $C \otimes V \in \mathcal{C}_2$ para cualquier $V \in Chain(k)^b$. Ahora bien, si $V \in Chain(k)^b$, entonces $C \otimes V$ se escribe como el complejo total asociado a un complejo doble de la forma

$$(\ddagger) \quad 0 \to C^{(I_0)}[n_0] \to C^{(I_1)}[n_0 + 1] \to \cdots \to C^{(I_k)}[n_0 + k] \to 0$$

Asociándole a un complejo del tipo (‡) el número natural $k + 1$ (que llamaremos *largo*), vemos que este complejo es un cono de un morfismo entre complejos de largo k y largo 1, luego, inductivamente, basta ver que $C^{(I)} \in \mathcal{C}_2$.

Pero ésto es sencillo porque $C^{(I)} = C \otimes k^{(I)}$ es un sumando directo de $C \otimes k^I = C^I$ (producto en la categoría $Chain(C)$), por lo tanto $C^{(I)} \in \mathcal{C}_2$ pues $\mathcal{C}_2$ es estable por productos (debido a *b*), es estable por sumandos directos y contiene a C.

Sea ahora $M \in Chain(C)^+$, como $\mathcal{C}_2$ es estable por quasi-isomorfismos, para ver que $M \in \mathcal{C}_2$ basta ver que $C(M) \in \mathcal{C}_2$. Como $C(M) = \varprojlim_p C(M)_p$, basta ver que cada $C(M)_p \in \mathcal{C}_2$. Pero al tener un triángulo

$$0 \to C \otimes (C^{\otimes p} \otimes M) \to C(M)_{p+1} \to C(M)_p \to 0$$

(pues esta sucesión se parte en la categoría de C-comódulos graduados), inductivamente basta ver que $C \otimes V \in \mathcal{C}_2$, cosa que ya sabíamos, luego $\mathcal{C}_2 = Chain(C)^+$.

Ejemplos: 1. Si C y D son equivalentes Morita - Takeuchi entonces $\mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{D}(D)^+$ y $\mathcal{D}(C) \cong \mathcal{D}(D)$.
2. Veremos, si bien de manera directa, sin utilizar este teorema, que si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras diferenciales graduadas positivas que es un quasi-isomorfismo, entonces $\mathcal{D}(C) \cong \mathcal{D}(D)$, y $\mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{D}(D)^+$.
3. Definiremos el concepto de (co)tilting o bicomódulo basculante y veremos que dadas dos coálgebras que sean equivalentes cotilting (en el sentido a definir mas adelante), si bien no tienen por qué ser equivalentes Morita - Takeuchi, sus categorías derivadas sí serán equivalentes.

7.7. Quasi-isomorfismos de coálgebras diferenciales graduadas, ejemplo de equivalencia derivada

Sea $f : C \to D$ un quasi-isomorfismo de coalgebras diferenciales graduadas positivas, se quiere ver que $\mathcal{D}(C) \cong \mathcal{D}(D)$. Para esto se considera el C-D-complejo C_f que es C como objeto y con estructura a derecha dada por

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{id \otimes f} C \otimes D$$

y análogamente se considera ${}_fC$.

Proposición 7.25. *Se tienen los siguientes isomorfismos:*

1. ${}_fC\square^R_C C_f \cong D$ *en* $\mathcal{D}(D^e)^+$
2. $C_f\square^R_D {}_fC \cong C$ *en* $\mathcal{D}(C^e)^+$

Demostración: 1. es casi inmediato. Como ${}_fC$ es un C-comódulo cerrado a derecha, entonces ${}_fC\square^R_C C_f = {}_fC\square_C C_f = {}_fC_f$, o sea, C considerado como D-bicomódulo. Por hipótesis, $f : C \to D$ es un quasi-isomorfismo. Considerando C como D-bicomódulo, $f : {}_fC_f \to D$ es un morfismo de D^e-comódulos, que es un quasi-isomorfismo, luego un isomorfismo en $\mathcal{D}(D^e)$.

2. Para calcular $C_f\square^R_D {}_fC$, hay que resolver a C_f como D-comódulo a derecha. Utilizando la resolución standard para los D-comódulos tenemos:

$$C_f\square^R_D {}_fC = Tot(\oplus_{n\geq 1} C \otimes D^{\otimes n}, d, b')\square_D C_f \cong$$
$$\cong Tot(\oplus_{n\geq 1} C \otimes D^{\otimes n-1} \otimes C, d, b')$$

por otro lado, utilizando la resolución standard de C como C-bicomódulo, tenemos que el complejo C es quasi-isomorfo a $Tot(\oplus_{n\geq 1} C^{\otimes n+1}, d, b')$, y de este complejo, aplicando f en $C^{\otimes n+1}$ salvo en en las componentes de los dos extremos, se tiene un morfismo de complejos C^e-colineal:

$$Tot(\oplus_{n\geq 1} C^{\otimes n+1}, d, b') \to Tot(\oplus_{n\geq 1} C \otimes D^{\otimes n-1} \otimes C, d, b')$$

el cual, según demostraremos a continuación, es un quasi-isomorfismo:

Por la fórmula de Künneth, f induce un quasi-isomorfismo entre los complejos:

$$id \otimes f^{\otimes r} \otimes id : (C^{\otimes r+2}, d) \to (C \otimes D^{\otimes r} \otimes C, d)$$

Por otro lado, los complejos de interés son

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
(C\otimes C)_2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C\otimes C)_2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C^{\otimes 2}\otimes C)_2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
(C\otimes C)_1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C\otimes C)_1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C^{\otimes 2}\otimes C)_1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
(C\otimes C)_0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C\otimes C)_0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C^{\otimes 2}\otimes C)_0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
(C\otimes C)_{-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C\otimes C)_{-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes C^{\otimes 2}\otimes C)_{-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
\vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] &
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
(C\otimes C)_2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D\otimes C)_2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D^{\otimes 2}\otimes C)_2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
(C\otimes C)_1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D\otimes C)_1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D^{\otimes 2}\otimes C)_1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
(C\otimes C)_0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D\otimes C)_0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D^{\otimes 2}\otimes C)_0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
(C\otimes C)_{-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D\otimes C)_{-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & (C\otimes D^{\otimes 2}\otimes C)_{-1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b'"] & \cdots \\
\vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "d"] &
\end{tikzcd}$$

por la fórmula de Künneth, las columnas son quasi-isomorfas. Si se consideran los complejos truncados hasta la columna n-ésima, éstos son quasi-isomorfos utilizando la fórmula de Künneth mas un argumento de inducción y la existencia de una sucesiones exactas cortas de complejos, con el grande en el medio y dos complejos con menos columnas en los costados. Ahora bien, el complejo total es el límite inverso de los complejos truncados hasta la columna n-ésima, entonces como la flecha es un quasi-isomorfismo sobre todos los limitandos, también es un quasi-isomorfismo en el límite, pues la homología conmuta con este tipo particular de límites inversos (se estaciona en tiempo finito grado a grado).

Como corolario, se tiene el resultado fundamental:

Teorema 7.26. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de coálgebras diferenciales graduadas que es un quasi-isomofismo, $C, D \in Chain(k)^+$, entonces ${}_fC\square^R_C- : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ y $C_f\square^R_D- : \mathcal{D}(D)^+ \to \mathcal{D}(C)^+$ son un par de equivalencias, una inversa de la otra.*

Observación: En este caso, no sólo se tiene una condición para ver cuando un complejo del tipo ${}_CX_D$ da una equivalencia entre $\mathcal{D}(C)^+$ y $\mathcal{D}(D)^+$ sino que además se tiene un segundo complejo del tipo ${}_DY_C$ tal que

$$X\square^R_DY \cong C$$

$$Y\square^R_CX \cong D$$

Esta será la condición que nos permitirá demostrar la invariancia de $Hoch^*$, y por lo tanto la meta de aquí en mas será la de encontrar las hipótesis adecuadas que nos permitan refinar los teoremas de caracterización de equivalencias hasta obtener formulas del tipo anterior. A los resultados de esta clase los llamaremos en general 'teoremas tipo Morita'.

7.8. Bicomódulos basculantes

Sea C una coálgebra con diferencial nulo y concentrada en grado cero, T_C un C-comódulo quasi-finito, $D = e_C(T)$ y tal que $e_D(T) = C$.
Observación: La condición de quasi-finitud puede parecer bastante restrictiva, pero si nos preguntamos qué tipo de funtores que admiten adjunto inducen una equivalencia derivada, entonces el hecho de admitir un adjunto fuerza a uno de los funtores a conmutar con sumas directas y a ser exacto a izquierda. Sabemos que en esa situación, el funtor no tiene otra opción que ser un producto cotensorial. A su vez, los únicos productos cotensoriales que admiten adjunto son aquellos que consisten en cotensorizar con un bicomódulo quasi-finito.

Definición 7.27. *Un bicomódulo ${}_DT_C$ se llamará (co)tilting si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

- $e_C(T) = D$, $e_D(T) = C$
- $Ext^n_D(Y, T) = 0\ \forall n \geq 2$, *para todo D-comódulo Y.*
- $Ext^1_D(T, T) = 0$
- *Existe una sucesión exacta del tipo*

  $$0 \to T_1 \to T_0 \to D \to 0$$

  donde los T_i son sumandos directos de sumas directas de T (es decir, $T_i \in Add(T)$, $i = 0, 1$).
- *Existe una sucesión exacta de D-C-bicomódulos*

  $$0 \to {}_DT_C \to I_0 \to I_1 \to 0$$

  Donde los I_i son D-inyectivos quasi-finitos.

Al igual que en el estudio de los objetos cerrados, los resultados que obtendremos estarán basados en la posibilidad de definir una adjunción.

Proposición 7.28. *Sea ${}_DT_C$ un comódulo C-quasi-finito. Entonces, para cualquier par de complejos $X \in Chain(C)$, $Y \in Chain(D)$ se tiene:*

$$Hom_{Ch(C)}(h_D(T, Y), X) \cong Hom_{Ch(D)}(Y, T\Box_C X)$$

$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(h_D(T, Y), X) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(Y, T\Box_C X)$$

donde el diferencial de $h_D(T, Y)$ es $h_D(T, d_Y)$ y el diferencial de $T\Box_C X$ es $id_T\Box_C d_X$.

Demostración: Recordamos que dados dos objetos A y B en la categoría de complejos sobre una categoría abeliana $\mathcal{C}$, está definido el complejo $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(A,B)$. En cada grado se lo define como

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(A,B)_p = \prod_{n\in\mathbb{Z}} Hom_{\mathcal{C}}(A_n, B_n[p])$$

y el diferencial está dado por

$$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \{\phi_{n+1}d_A + (-1)^n d_B\phi_n\}$$

Demostraremos primero que $\mathcal{H}om_C(h_D(T,Y),X)$ es isomorfo, como complejo, a $\mathcal{H}om_D(Y, T\Box_C X)$.

La adjunción entre las categorías de C-comódulos y D-comódulos nos provee de un isomorfismo en cada grado, ya que

$$\mathcal{H}om_C(h_D(T,Y),X)_p = \prod_{n\in\mathbb{Z}} Hom_C(h_D(T,Y_n), X_n[p]) \cong$$

$$\cong \prod_{n\in\mathbb{Z}} Hom_D(Y_n, T\Box_C X_n[p]) \cong \mathcal{H}om_D(Y, T\Box_C X)_p$$

Este isomorfismo conmuta con el diferencial, y para ver ésto se utiliza la naturalidad de la adjunción: llamemos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a un elemento de $\mathcal{H}om_D(Y,T\Box_C X)$, y denotemos por $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ al elemento de $\mathcal{H}om_C(h_D(T,Y),X)$ correspondiente a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ según el isomorfismo de la adjunción.

Como $d_X : X_n \to X_{n+1}$ es un morfismo en la categoría de C-comódulos, la naturalidad de la adjunción dice que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(h_D(T,Y_n),X_n) \arrow[r, "d_*"] \arrow[d, equal] & Hom_C(h_D(T,Y_n),X_{n+1}) \arrow[d, equal] \\
Hom_D(Y_n, T\Box_C X_n) \arrow[r, "(1\Box d)_*"] & Hom_D(Y_n, T\Box_C X_{n+1})
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si tomamos el elemento $g_n \in Hom_C(h_D(T,Y_n),X_n)$, $d_*(g_n) = dg_n$, por otro lado el morfismo correspondiente a g_n es el que habíamos llamado f_n, y éste es enviado a $(id\Box d_x)_* f_n = (id\Box d_x)f_n$, luego dg_n corresponde a $(id\Box d_x)f_n = d_{T\Box_C X}f$.

Utilizando ahora la naturalidad en la otra variable, dado $d_Y : Y_n \to Y_{n+1}$ obtenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(h_D(T,Y_{n+1}),X_{n+1}) \arrow[r, "h_D(T,d)^*"] \arrow[d, equal] & Hom_C(h_D(T,Y_n),X_{n+1}) \arrow[d, equal] \\
Hom_D(Y_{n+1}, T\Box_C X_{n+1}) \arrow[r, "d^*"] & Hom_D(Y_n, T\Box_C X_{n+1})
\end{tikzcd}$$

Llamando de nuevo f_{n+1} a un elemento de $Hom_D(Y_{n+1}, T\Box_C X_{n+1})$ y g_{n+1} a su correspondiente en $Hom_C(h_D(T,Y_{n+1}),X_{n+1})$ tenemos que $h_D(T,d)^*(g_{n+1}) = g_{n+1}h_D(T,d) = g_{n+1}d_{h_D(T,Y)}$ se corresponde con $d^*(f) = fd$.

Con estos dos datos, vemos que el diferencial de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que es

$$\{f_{n+1}d_Y + (-1)^n d_{T\square_C X} f_n\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

se corresponde con $\{g_{n+1}d_{h_D(T,Y)} + (-1)^n d_X g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que no es otra cosa que el diferencial de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Como corolario de este cálculo tenemos que los ciclos de grado cero de los complejos $\mathcal{H}om_C(h_D(T,Y),X)$ y $\mathcal{H}om_D(Y,T\square_C X)$ son isomorfos, y los ciclos en grado cero de estos complejos son los morfismos en las categorías $Chain(C)$ y $Chain(D)$ respectivamente. Utilizando el mismo isomorfismo de complejos también podemos decir que las homologías en grado cero son isomorfas, y ésto es lo mismo que decir que $Hom_{\mathcal{H}(C)}(h_D(T,Y),X) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(Y,T\square_C X)$.

Corolario 7.29. *Con las notaciones anteriores, $T\square_C - : \mathcal{H}(C) \to \mathcal{H}(D)$ y $T\square_C^R - : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ conservan productos.*

Demostración: El funtor $T\square_C - : \mathcal{H}(C) \to \mathcal{H}(D)$ preserva productos pues admite un adjunto a izquierda.

Sean ahora $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $Chain(C)^+$ indexada por un conjunto I tal que $\prod_i M_i \in Chain(C)^+$. Para calcular $T\square_C^R(\prod_i M_i)$ hay que buscar un objeto C-cerrado quasi-isomorfo a $\prod_i M_i$; una opción es considerar $C(\prod_i(M_i))$, que es cerrado, pero no es necesariamente válida la igualdad $C(\prod_i M_i) = \prod_i C(M_i)$, sin embargo, otra opción es considerar directamente $\prod_i C(M_i)$, y como cada $C(M_i)$ es quasi-isomorfo a M_i (es k-homotópico a), entonces $\prod_i C(M_i)$ es quasi-isomorfo a $\prod_i M_i$ (son k-homotópicamente equivalentes) y además es cerrado (producto de cerrados es cerrado). Sabiendo que $T\square_C -$ conmuta con productos, tenemos

$$T\square_C^R(\prod_i M_i) = T\square_C \prod_i C(M_i) = \prod_i (T\square_C C(M_i)) = \prod_i (T\square_C^R M_i)$$

Teorema 7.30. *Sea ${}_DT_C$ un comódulo basculante. Entonces $T\square_C - : Chain(C)^+ \to Chain(D)^+$ induce una equivalencia $T : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$.*

Demostración: Utilizando el Teorema 7.24, la condición *(a)* es parte de la definición de bicomplejo basculante, la parte *(b)* es el corolario anterior.

Para la parte *(c)*, si una subcategoría de $Chain(D)^+$ es estable por extensiones por objetos de $Chain(k)^+$ y por sumandos directos, al contener a T contiene necesariamente a $Add(T)$, y como existe una sucesión exacta del tipo

$$0 \to T_1 \to T_0 \to D \to 0$$

entonces la estabilidad por conos implica que la imagen del funtor $T\square_C -$ contiene al complejo $T_1 \to T_0$ (que es el cono de la aplicación diferencial del complejo concentrado T_1

en el complejo concentrado T_0). La estabilidad por quasi-isomorfismos implica entonces que la imagen de $T\square_C-$ contiene a D.

Observación: Un complejo del tipo

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \longrightarrow 0$$

se obtiene por un proceso de conos iterados, pues $Co(d_1 : X_1 \to X_0) = (0 \to X_1 \to X_0 \to 0)$, a su vez $(0 \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to 0) = Co\,(d_2 : X_2 \to (0 \to X_1 \to X_0 \to 0))$, etc. Por lo tanto, podemos extender la definición de comódulo cotilting de la siguiente manera:

Definición 7.31. *Un bicomódulo ${}_DT_C$ se llamará basculante generalizado, o (co)tilting generalizado, si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

- $e_C(T) = D$*,* $e_D(T) = C$
- $Ext^n_D(Y, T) = 0\ \forall n \geq 2$*, para todo* D*-comódulo* Y*.*
- $Ext^1_D(T, T) = 0$
- *Existe una sucesión exacta del tipo*

  $$0 \to T_n \to \cdots \to T_1 \to T_0 \to D \to 0$$

  donde los T_i *son sumandos directos de sumas directas de* T *(es decir,* $T_i \in Add(T)$*,* $i = 0, 1, \ldots, n$*).*
- *Existe una sucesión exacta de* D*-*C*-bicomódulos*

  $$0 \to {}_DT_C \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_n \to 0$$

  Donde los I_i *son inyectivos quasi-finitos vistos como* D*-comódulos.*

Y de la misma manera, adaptando y copiando las demostraciones de esta sección, podemos generalizar el teorema anterior de la manera obvia:

Teorema 7.32. *Sea* ${}_DT_C$ *un comódulo tilting generalizado. Entonces el funtor* $T\square_C- : Chain(C)^+ \to Chain(D)^+$ *induce una equivalencia de categorías trianguladas* $T = T\square^R_C- : \mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{D}(D)^+$*.*

Observación: La condicion $Ext^*_D(T, T) = 0$ para $* \geq 1$ es necesaria si se quiere seguir teniendo el resultado de equivalencia entre las categorías derivadas $\mathcal{D}(C)^+$ y $\mathcal{D}(e_C(T))^+$ pues si estas categorías son equivalentes vía el funtor $T\square^R_C-$, entonces $Ext^n_D(T, T) = Hom_{\mathcal{D}(D)}(T_*, T_*[n]) = Hom_{\mathcal{D}(C)}(C, C[n])$ y este último espacio es cero a menos que $n = 0$.

8. Hacia resultados tipo Morita

8.1. Definición de comódulo quasi-finito generalizado

Durante esta sección, C y D denotarán k-coálgebras diferenciales graduadas positivas.

Sea ${}_DT_C$ un objeto de $Chain(D \otimes C^{op})^+$ y consideremos el funtor $T\square_C- : Chain(C)^+ \to Chain(D)^+$. Este funtor, además de ser un funtor entre $Chain(C)^+$ y $Chain(D)^+$, puede considerarse como funtor entre categorías con el Hom ampliado, más precisamente, si consideramos la categoría cuyos objetos son los mismos que los objetos de $Chain(C)^+$ (resp. $Chain(D)^+$) pero como conjunto de morfismos se toma $\mathcal{H}om_C$ (resp. $\mathcal{H}om_D$), entonces $T\square_C-$ es también un funtor en esa categoría.

Definición 8.1. *Sea ${}_DT_C \in Chain(D \otimes C^{op})$, diremos que T es* **quasi-finito generalizado** *(g.q.f.) si y sólo si para cada $Y \in Chain(C)$ existe un objeto $h_D(T,Y)$ en $Chain(D)$, que es funtorial en Y, y un isomorfismo*

$$\mathcal{H}om_D(h_D(T,Y),X) \cong \mathcal{H}om_C(Y, T\square_C X)$$

natural en X.

Como primer ejemplo tenemos que si C y D son coálgebras concentradas y ${}_DT_C$ es un D-C-bicomódulo que es quasi-finito como D-comódulo en el sentido usual, entonces T es quasi-finito en el sentido generalizado.

Observación: Dado $Y \in Chain(D)$, entonces $h_D(-,Y)$ es funtorial con respecto a los bicomódulos T g.q.f. La demostración de esto es simplemente abstract nonsense.

La noción de g.q.f. es estable por sumas finitas, sumandos directos, traslaciones y conos (basta definir $h_D(Co(T \to T'),Y)$ como $Co\left(h_D(T',Y) \to h_D(T,Y)\right)[-1]$). Como consecuencia de ésto, si C y D son dos coálgebras concentradas y T es un complejo acotado en donde en cada grado se tienen D-C-bicomódulos D-quasi-finitos, entonces T es g.q.f.

A partir de la definición, se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 8.2. *Sea ${}_DT_C \in Chain(D \otimes C^{op})^+$ g.q.f., entonces*

$$Hom_{Ch(C)}(h_D(T,Y),X) \cong Hom_{Ch(D)}(Y, T\square_C X)$$
$$Hom_{\mathcal{H}(C)}(h_D(T,Y),X) \cong Hom_{\mathcal{H}(D)}(Y, T\square_C X)$$

para todo $X \in Chain(C)$ e $Y \in Chain(D)$.

Demostración: Esto es claro pues

$$Hom_{Ch(C)}(-,-) = \left(\mathcal{H}om_C(-,-)\right)_0 \text{ y } Hom_{\mathcal{H}(C)}(-,-) = H^0\left(\mathcal{H}om_C(-,-)\right)$$

Si $X = C$ e $Y = {}_DT$ con T g.q.f., tenemos que

$$h_D^*(T,T) = \mathcal{H}om_k(h_D(T,T),k) \cong \mathcal{H}om_C(h_D(T,T),C) \cong \mathcal{H}om_D(T,T)$$

es decir, el dual graduado de $h_D(T,T)$ es un álgebra diferencial graduada. Veremos que de hecho, $h_D(T,T)$ es una coálgebra diferencial graduada.

Proposición 8.3. *Sea ${}_CX_k$ g.q.f., entonces $\mathcal{E} := h_C(X,X)$ es una coálgebra diferencial graduada.*

Demostración: El morfismo de estructura se obtiene como sigue:

Del morfismo identidad $id_{\mathcal{E}} \in Hom_{Ch(k)}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = Hom_{Ch(C)}(X, X \otimes \mathcal{E})$ se tiene un morfismo, que denotamos ρ; componiendo con $\rho \otimes id_{\mathcal{E}}$ se tiene un elemento en

$$Hom_{Chain(C)}(X, X \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}) = Hom_{Chain(k)}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$$

y esa es la comultiplicación. De un cálculo directo se tiene que la traspuesta de la comultiplicación no es otra cosa que la composicion en $End_C(X) = \mathcal{E}^{gr*}$. Por otro lado $End_C(X)$ es un álgebra diferencial graduada, por lo tanto $\mathcal{E}$ es una coálgebra diferencial graduada, como se sigue del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rrrr, "\Delta"] \arrow[dddd, "d"'] \arrow[dr] & & & & \mathcal{E}\otimes\mathcal{E} \arrow[dl] \arrow[dddd, "1\otimes d \pm d\otimes 1"] \\
& \mathcal{E}^{**} \arrow[r, "m^*"] \arrow[dd, "d^{**}"] & (End\otimes End)^* \arrow[dd, "(1\otimes d^* \pm d^*\otimes 1)^*"] & \mathcal{E}^{**}\otimes\mathcal{E}^{**} \arrow[l] \arrow[dd, "1\otimes d^{**} \pm d^{**}\otimes 1"] & \\
& & & & \\
& \mathcal{E}^{**} \arrow[r, "m^*"] & (End\otimes End)^* & \mathcal{E}^{**}\otimes\mathcal{E}^{**} \arrow[l] & \\
\mathcal{E} \arrow[rrrr, "\Delta"] \arrow[ur] & & & & \mathcal{E}\otimes\mathcal{E} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Se quiere ver que el cuadrado más grande es conmutativo. El cuadrado más chico de la izquierda es conmutativo porque End es un álgebra diferencial graduada, la placa de arriba (y la de abajo) son conmutativas por argumentos de álgebra lineal, las otras también (por mismas razones).

Observación: empezando con coálgebras concentradas C y D, al estudiar las eventuales equivalencias entre $\mathcal{D}(C)$ y $\mathcal{D}(D)$ vemos que las coálgebras diferenciales graduadas aparecen inevitablemente. La utilidad y necesidad de la introducción de objetos diferenciales graduados en la teoría de Morita para categorías derivadas de módulos fue ya remarcada por B. Keller [Ke 94b].

Como en el caso de coálgebras y comódulos concentrados, se tienen las siguientes propiedades del funtor $h_D(T,-)$:

Proposición 8.4. *Sea ${}_DX_k$ un objeto g.q.f., llamando $\mathcal{E} = h_D(X,X)$ entonces $X \in Chain(\mathcal{E}^{op})$, si $Y \in Chain(D)$ un D-comódulo entonces $h_D(X,Y) \in Chain(\mathcal{E})$ y además ${}_DX_{\mathcal{E}}$ es g.q.f., es decir,*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(h_D(X,Y), U) \cong \mathcal{H}om_D(Y, X \square_{\mathcal{E}} U)$$

Demostración: de la adjunción

$$\mathcal{H}om_k(h_D(X,Y), Z) \cong \mathcal{H}om_D(Y, X \otimes Z)$$

tomando $Z = h_D(X,Y)$ se tiene un morfismo $Y \to X \otimes h_D(X,Y)$ de grado cero que es el que corresponde a la identidad de $h_D(X,Y)$ (que es también de grado cero). Tomando el caso particular $X = Y$ se tiene un morfismo $X \to X \otimes \mathcal{E}$; éste es el morfismo de estructura de X como $\mathcal{E}$-comódulo a derecha.

Volviendo a un Y cualquiera, del morfismo identidad

$$id_{h_D(X,Y)} \in \mathcal{H}om_k(h_D(X,Y), h_D(X,Y)) \cong \mathcal{H}om_D(Y, X \otimes h_D(X,Y))$$

se tiene un morfismo de complejos $Y \to X \otimes h_D(X,Y)$, el cual componiéndolo con el morfismo de estructura de X da un elemento de

$$\mathcal{H}om_D(Y, X \otimes \mathcal{E} \otimes h_D(X,Y)) \cong \mathcal{H}om_k(h_D(X,Y), \mathcal{E} \otimes h_D(X,Y))$$

Este morfismo provee a $h_D(X,Y)$ de una estructura de $\mathcal{E}$-comódulo (a izquierda).

Para ver la adjunción entre categorías de D-comódulos y de $\mathcal{E}$-comódulos se considera el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}om_k(h_D(X,Y), U) & \cong & \mathcal{H}om_D(Y, X \otimes U) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_k(h_D(X,Y), \mathcal{E} \otimes U) & \cong & \mathcal{H}om_D(Y, X \otimes \mathcal{E} \otimes U)
\end{array}$$

Las flechas verticales son, en la columna de la derecha, la diferencia entre las flechas inducidas por la estructura de X y la de U. En la columna de la izquierda, la flecha de abajo es la diferencia entre la inducida por la estructura de $h_D(X,Y)$ y por la de U. Pero visto cómo estaban definidas las estructuras a derecha de X y a izquierda de $h_D(X,Y)$, la flecha de la columna de la derecha esta en correspondencia con la flecha de la columna de la izquierda, por lo tanto sus núcleos son isomorfos. El núcleo de la flecha de la izquierda es por definición $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(h_D(X,Y), U)$ y el núcleo de la flecha de la derecha consiste en los morfismos con imagen en $X \square_{\mathcal{E}} U$, es decir, $\mathcal{H}om_D(Y, X \square_{\mathcal{E}} U)$, como queríamos ver.

Consecuencia:

Sea $F : \mathcal{D}(C) \to \mathcal{D}(D)$ un funtor tal que $F(C)$ es quasi-isomorfo a un objeto ${}_DX$ g.q.f. y cerrado, entonces $X \in \mathcal{D}(D \otimes \mathcal{E}^{op})$.

Suponiendo que F es una equivalencia, queremos ver en qué situaciones el funtor $X \square_{\mathcal{E}}^R - : \mathcal{D}(\mathcal{E}) \to \mathcal{D}(D)$, también es una equivalencia:

8.2. Se quiere ver que ${}_DX_{\mathcal{E}} \square_{\mathcal{E}}^R -$ es una equivalencia.

Comenzamos con unos comentarios en el caso particular de coálgebras concentradas.

Supongamos C y D dos coálgebras concentradas tales que existe una equivalencia de categorías trianguladas $F : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$. Denotemos por $\mathcal{H}_I(C)^+$ a la subcategoría plena de $\mathcal{H}(C)^+$ formada por los complejos M tales que M_n es C-inyectivo para todo $n \in \mathbb{Z}$, análogamente denotamos por $H_I(D)^+$ a los complejos de componentes D-inyectivas.

Ya sabíamos de antes que $\mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{H}_c(C)^+$ donde $\mathcal{H}_c$ denota la clase de objetos cerrados, el funtor que da esta equivalencia es la resolución standard $M \mapsto C(M)$, y en este caso vemos claramente que $C(M)$ toma valores en $\mathcal{H}_I(C)^+$, por lo tanto $\mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{H}_I(C)^+$. Tenemos así la siguiente proposición:

Proposición 8.5. *Sean C y D dos k-coálgebras concentradas, son equivalentes:*

1. $\mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{D}(D)^+$
2. $\mathcal{H}_I(C)^+ \cong \mathcal{H}_I(D)^+$

Lo que deseamos es agregar a esta lista de equivalencias, una versión $\mathcal{H}^b$ (donde por $\mathcal{H}^b$ denotamos a la subcategoría plena de $\mathcal{H}$ formada por los objetos homotópicamente equivalentes a objetos de $Chain^b$), para esto, siguiendo las ideas de J. Rickard [Ri89], podemos caracterizar a los objetos acotados de la siguiente manera:

Lema 8.6. *Sea C una k-coálgebra concentrada, $X \in \mathcal{H}_I(C)^+$. Entonces $X \in \mathcal{H}_I(C)^b$ si y solo si, para cada $Y \in \mathcal{H}_I(C)^+$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X[n], Y) = 0$ para todo $n \leq n_0$.*

Demostración: Como $X \in \mathcal{H}_I(C)^b$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $X_p = 0$ para todo p tal que $|p| > m$, además dado $Y \in \mathcal{H}_I(C)^+$, se tendrá que $Y_p = 0$ para todo $p < m'$ para un dado $m' \in \mathbb{Z}$. Tomando $n \leq m - m'$, tenemos que $Hom_{Ch(C)}(X[n], Y) = 0$, por lo tanto $Hom_{\mathcal{H}(C)}(X[n], Y) = 0$, es decir que la condición es necesaria.

Veamos la suficiencia:

Sea $X \in \mathcal{H}_I(C)^+$, tomamos $Y = C$, luego existe n_0 tal que

$$0 = Hom_{\mathcal{H}(C)}(X[n], C) = X^*_{-n} \ \ \forall n \leq n_0$$

luego $X_n = 0$ para $n \geq -n_0$, es decir que $X \in \mathcal{H}_I(C)^-$, pero como X ya estaba en $\mathcal{H}_I(C)^+$ se sigue que $X \in \mathcal{H}_I(C)^b$.

Esta caracterización de los complejos acotados es estable por equivalencias de categorías trianguladas $\mathcal{H}_I(C)^+ \to \mathcal{H}_I(D)^+$, luego tenemos el siguiente corolario:

Corolario 8.7. *Sean C y D dos k-coálgebras concentradas, son equivalentes:*

1. $\mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{D}(D)^+$
2. $\mathcal{H}_I(C)^+ \cong \mathcal{H}_I(D)^+$
3. $\mathcal{H}_I(C)^b \cong \mathcal{H}_I(D)^b$

Este corolario lo que dice es que, si C y D son dos coálgebras concentardas y $F : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ es una equivalencia de categorías trianguladas, entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que $F(C)$ es un complejo acotado de los dos lados, y con componentes D-inyectivas (por lo tanto cerrado).

Cuando C y D son dos coálgebras diferenciales graduadas arbitarias, la definición de $\mathcal{H}_I$ no tiene sentido pues por ejemplo la coálgebra misma no tiene porqué tener componentes C-inyectivas (de hecho, las componentes ni siquiera tienen porqué ser C-comódulos, tan solo son C_0-comódulos). Si C y D son dos coálgebras diferenciales graduadas positivas y $F : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ una equivalencia de categorías trianguladas, no sabemos si es posible elegir, dentro de la clase de objetos quasi-isomorfos a $F(C)$, uno tal que a la vez pertenezca a $Chain(D)^b$ y sea cerrado, es por esto que asumiremos este hecho como hipótesis, por lo visto anteriormente, en el caso concentrado esta hipótesis se satisface automáticamente.

Proposición 8.8. *Sean C y D dos k-coálgebras diferenciales graduadas positivas tales que existe una equivalencia de categorías trianguladas $F : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$. Asumamos además que $F(C)$ es quasi-isomorfo a un objeto ${}_DX$ g.q.f. cerrado y acotado (i.e. $X \in Chain(D)^b$) y que además $\mathcal{E} := h_D(X,X)$ es graduada positiva. Entonces el funtor $X\square^R_{\mathcal{E}}- : \mathcal{D}(\mathcal{E})^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ es una equivalencia.*

Demostración: Como $X \in Chain(k)^b$, se sigue que $\mathcal{E} \in Chain(k)^b$, podemos utilizar entonces la caracterización de equivalencias que da el Teorema 7.24.

El punto *(a)*:

Como X es cerrado,

$$Hom_{\mathcal{D}(D)}(X, X[n]) = Hom_{\mathcal{H}(D)}(X, X[n]) =$$

por la adjunción

$$= Hom_{\mathcal{H}(D)}(X, X\square^R_{\mathcal{E}}\mathcal{E}[n]) = Hom_{\mathcal{H}(\mathcal{E})}(h_D(X,X), \mathcal{E}[n]) = Hom_{\mathcal{H}(\mathcal{E})}(\mathcal{E}, \mathcal{E}[n])$$

El punto *(b)*: Como X es g.q.f, el funtor $X\square_{\mathcal{E}}- : \mathcal{H}(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}(D)$ admite adjunto, por lo tanto, con demostración idéntica a la del Corolario 7.29 se tiene que $X\square^R_{\mathcal{E}}- : \mathcal{D}(\mathcal{E})^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ conserva productos.

El punto *(c)*:

Dado que F es una equivalencia y C "genera"$\mathcal{D}(C)^+$, al ser $F(C) = X = X\square^R_{\mathcal{E}}\mathcal{E}$ entonces X "genera.ª $\mathcal{D}(D)^+$, pues F conmuta con productos, extensiones por objetos de $Chain(k)^+$, conos y traslaciones.

Corolario 8.9. *Sean C y D dos coálgebras concentradas y sea $F : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ una equivalencia tal que $F(C)$ es quasi-isomorfo a un objeto ${}_DX$ cerrado acotado y g.q.f. tal que $\mathcal{E} = h_D(X,X)$ es graduado positivo. Entonces existe un objeto ${}_DT_C$ tal que $T\square^R_C- : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ es una equivalencia.*

Demostración: llamemos $\mathcal{E}$ a $h_D(X,X)$, sabemos que $X\square^R_{\mathcal{E}}- : \mathcal{D}(\mathcal{E})^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ es una equivalencia.

Como $\mathcal{E}$ es una coálgebra graduada positiva, el morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}_0 \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, "d_1"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & Ker(d_0) \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \end{tikzcd}$$

es un morfismo de coálgebras. Si consideramos los morfismos duales, dado que $\mathcal{E}^* = h_D^*(X,X) = Hom_{Ch(k)}(h_D(X,X),k) = Hom_{Ch(D)}(X,X)$, su homología es

$$H^n(\mathcal{E}^*) = Hom_{\mathcal{H}(D)}(X, X[n]) = Hom_{\mathcal{D}(D)}(X, X[n])$$

(pues X se supone D-cerrado) y ésto a su vez es igual a $Hom_{\mathcal{D}(C)}(C, C[n])$ pues se tiene una equivalencia $F : \mathcal{D}(C) \to \mathcal{D}(D)$ y $F(C) = X$. Como C está concentrada en grado cero (y además es un objeto C-cerrado) entonces este Hom da cero a menos que $n = 0$ y en ese caso da $Hom_C(C,C) = C^*$. Como consecuencia de ésto, tenemos que el morfismo $f : C = H^0(E) \to E$ es un quasi-isomorfismo.

Las categorías $\mathcal{D}(C)^+$, $\mathcal{D}(\mathcal{E})^+$ son equivalentes en virtud del Teorema 7.26, las equivalencias entre estas categorías están dadas por

$${}_fC\square_C^R- : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(\mathcal{E})^+$$

$$C_f\square_{\mathcal{E}}^R- : \mathcal{D}(\mathcal{E})^+ \to \mathcal{D}(C)^+$$

Podemos componer las equivalencias:

$$\mathcal{D}(C)^+ \xrightarrow{{}_fC\square_C^R} \mathcal{D}(\mathcal{E})^+ \xrightarrow{X\square_{\mathcal{E}}^R} \mathcal{D}(D)^+$$

Por la asociatividad del producto cotensorial derivado, tenemos que $T := X\square_{\mathcal{E}}^R {}_fC \in Chain(D \otimes C^{op})^+$ induce una equivalencia $T\square_C^R- : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$.

8.3. Más sobre (co)tiltings generalizados

Sabemos a partir del Teorema 7.32 que si C y D son dos coálgebras concentradas y ${}_DT_C$ es un bicomódulo que es basculante generalizado entonces induce una equivalencia $T\square_C^R- : \mathcal{D}(C)^+ \cong \mathcal{D}(D)^+$, lo que no sabemos aún es si el funtor inverso a $T\square_C^R-$ es o no de la forma $Q\square_D^R-$ para algún complejo $Q \in Chain(C \otimes D^{op})^+$. Demostraremos en esta subsección que éste es el caso.

Antes de demostrar lo enunciado en el párrafo anterior, demostramos un Lema que puede ser considerado como parte del folklore de la teoría de comódulos:

Lema 8.10. *Sean C y D dos coálgebras (concentradas), ${}_DI_C$ un bicomódulo, que visto como D-comódulo es inyectivo y quasi-finito. Si M es un D-comódulo a derecha, entonces*

$$h_D(I, M) \cong h_D(I, D)\square_D M$$

(isomorfismo de C-comódulos)

Demostración: Como el funtor $h_D(I,-)$ es adjunto a izquierda de $I\Box_C-$, entonces conmuta con sumas directas, en consecuencia, si W es un espacio vectorial cualquiera y X es un D-comódulo a derecha, entonces $h_D(I, X\otimes W) = h_D(I,X)\otimes W$.

Por otro lado sabemos que $h_D(I,-)^* = Com_D(-,I)$; al haber supuesto que I fuera D-inyectivo, el funtor $Com_D(-,I)$ es exacto, luego $h_D(I,-)$ también es exacto. Considerando entonces la sucesión exacta a izquierda:

$$0 \to M \to^{\rho} D\otimes M \to^{b'} D\otimes D\otimes M$$

tenemos la siguiente identificación de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & h_D(I,M) \arrow[r] & h_D(I, D\otimes M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & h_D(I, D\otimes D\otimes M) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & h_D(I,D)\Box_D M \arrow[r] & h_D(I,D)\otimes M \arrow[r] & h_D(I,D)\otimes D\otimes M
\end{tikzcd}$$

de lo que se sigue el resultado buscado.

Teorema 8.11. *Sea ${}_DT_C$ un bicomódulo basculante generalizado, sea $T_* \in Chain(D\otimes C^{op})^b$ el complejo de la definición de basculante generalizado que es quasi-isomorfo a T está formado por bicomódulos que son D-inyectivos quasi-finitos. Entonces se tienen isomorfismos (en $\mathcal{D}(D^e)^+$ y $\mathcal{D}(C^e)^+$ respectivamente):*

$$T_*\Box_C h_D(T_*, D) \cong D$$

$$h_D(T_*, D)\Box_D T_* \cong C$$

Demostración: probaremos sólo el segundo isomorfismo, el primero será un corolario de los resultados de la sección siguiente.

$h_D(T_*, D)_n = h_D(T_{-n}, D)$, luego

$$(h_D(T_*, D)\Box_D T_*)_n = \oplus_{p+q=n} h_D(T_{-p}, D)\Box_D T_q = \oplus_{p+q=n} h_D(T_{-p}, T_q)$$

Luego $h_D(T_*, D)\Box_D T_* = h_D(T_*, T_*)$ y sabíamos que esta coálgebra es quasi-isomorfa a C.

8.4. Lemas de extensión de funtores

Lema 8.12. *Sean C y D dos coálgebras diferenciales graduadas positivas y sea $F : \mathcal{D}(C)^+ \to \mathcal{D}(D)^+$ una equivalencia con inverso $G : \mathcal{D}(D)^+ \to \mathcal{D}(C)^+$. Entonces, para cualquier coálgebra diferencial graduada positiva E, se puede extender a F y a G para formar un par de equivalencias entre $\mathcal{D}(C\otimes E)^+$ y $\mathcal{D}(D\otimes E)^+$.*

Demostración: Sea $X \in \mathcal{D}(C\otimes E)^+$, entonces X es quasi-isomorfo a su resolución con respecto a E:

$${}_{C,E}X \to Tot(\oplus_{n>0E} E^{\otimes n} \otimes {}_C X, b'_E, d)$$

Se define entonces

$$\widehat{F}(X) := Tot(\oplus_{n>0E} E^{\otimes n} \otimes {}_D F({}_C X), b'_E, d) \in \mathcal{D}(D \otimes E)$$

Notar que como la estructura de E-comódulo es C-colineal, entonces se le puede aplicar el funtor F a la flecha E-estructural de X y queda así bien definido el complejo de la derecha.

De manera análoga se define $\widehat{G}$. Veamos que $\widehat{G}$ es inverso de $\widehat{F}$:

$$\widehat{G}(\widehat{F}(X)) = \oplus_{n>0E} E^{\otimes n} \otimes {}_C G(\widehat{F}(X)) =$$
$$= \oplus_{n>0E} E^{\otimes n} \otimes {}_C G(\oplus_{p>0E} E^{\otimes p} \otimes {}_D F(X))$$

pero $\oplus_{p>0} E^{\otimes p} \otimes_D F(X)$ es quasi-isomorfo a $F(X)$ como D-comódulo, entonces $G(\oplus_{p>0E} E^{\otimes p} \otimes {}_D F(X)))$ es quasi-isomorfo a $G(F(X))$ como C-comódulo, luego la ultima expresión es quasi-isomorfa a

$$\oplus_{n>0E} E^{\otimes n} \otimes {}_C G(F(X)) \cong \oplus_{n>0E} E^{\otimes n} \otimes {}_C X \cong {}_{E,C} X$$

El quasi-isomorfismo del otro lado es análogo. Notar que todos los morfismos expuestos son funtoriales, luego $\widehat{G} \circ \widehat{F} \cong Id$ y lo mismo en el otro sentido.

Corolario 8.13. *Sean C y D dos coálgebras concentradas y ${}_D T_C$ un complejo basculante generalizado. Consideremos $F = {}_D T_C \square_C -$ y $G = h_D(T, -)$ y llamemos ${}_C Q_D := h_D(T, D)$. Entonces*

$${}_D T \square^R_C Q \cong D$$
$${}_C Q \square^R_D T \cong C$$

en $\mathcal{D}(D \otimes D^{op})$ y $\mathcal{D}(C \otimes C^{op})$ respectivamente.

Demostración: Se extiende a $G = {}_C Q_D \square^R_D -$ y a $F = {}_D T_C \square^R_C -$ a las categorías $\mathcal{D}(C \otimes C^{op})^+$ y $\mathcal{D}(D \otimes C^{op})^+$ respectivamente, considerándose los $\widehat{F}$ y $\widehat{G}$ pertinentes. Entonces:

$${}_C C_C \cong \widehat{G}(\widehat{F}({}_C C_C) = \widehat{G}(\oplus_{n>0D} T_* \otimes C_C^{\otimes n}) \cong$$
$$\cong \widehat{G}({}_D T_{*C}) \cong (\oplus_{n>0C} h_D(T_*, T_*) \otimes C_C^{\otimes n}) \cong$$
$$\cong (\oplus_{n>0C} h_D(T, D) \square^R_D T \otimes C_C^{\otimes n}) \cong {}_C h_D(T_*, D) \square^R_D T_C =$$
$$= {}_C Q \square^R_D T_C$$

Llamamos ahora $\widetilde{F}$ y $\widetilde{G}$ a los funtores que provienen de F y G extendidos a las categorías $\mathcal{D}(D \otimes D^{op})^+$ y $\mathcal{D}(C \otimes D^{op})^+$, y obtenemos, de manera análoga:

$${}_D D_D \cong \widetilde{F}(\widehat{G}({}_D D_D) = \widetilde{F}(\oplus_{n>0C} h_D(T_*, D) \otimes D_D^{\otimes n}) \cong$$
$$\cong \widetilde{F}({}_C h_D(T_*, D)_D) \cong (\oplus_{n>0D} T_* \square_C h_D(T_*, D) \otimes D_D^{\otimes n}) \cong$$
$$\cong {}_D T \square^R_C Q$$

9. Homología de Hochschild y cíclica de coálgebras diferenciales graduadas

El propósito de este capítulo es el de definir los grupos de cohomología de Hochschild y cíclica para las coálgebras diferenciales graduadas. Estas nuevas definiciones, análogamente al contexto de álgebras diferenciales graduadas tendrán en cuenta no sólo la estructura de comultiplicación sino también el diferencial. Será una definición tal que si $f : C \to D$ es un morfismo de coálgebras diferenciales graduadas que es un quasi-isomorfismo, entonces sus homologías (a través de un morfismo inducido por f) sean isomorfas.

Naturalmente, las definiciones del caso diferencial graduado generalizarán las del caso usual considerando a una coálgebra sin estructura diferencial graduada como graduada concentrada en grado cero y con diferencial nulo.

9.1. CoHomología de Hochschild

Dada C una coálgebra diferencial graduada, recordamos la definición de la resolución standard $C(C)$:

$$C(C)_p = \left(\bigoplus_{n \geq 1} C^{\otimes n+1} \right)_p = \bigoplus_{i_0 + \ldots i_n = p} C_{i_0} \otimes \ldots C_{i_n}$$

y su diferencial se escribe como la suma de dos diferenciales:

$$b' : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+2}$$

$$b' = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Delta_i$$

donde $\Delta_i(c_0, \ldots, c_n) := (c_0, \ldots, \Delta(c_i), \ldots, c_n)$

$$d : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+1}$$

$$(c_0, \ldots, c_n) \mapsto (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{|c_{i_0}| + \cdots + |c_{i_{k-1}}|} (c_{i_1}, \ldots, d_C(c_{i_k}), \ldots, c_{i_n}) \right)$$

Se define el operador cíclico sobre elementos homogéneos (extendiéndolo despues por linealidad) como:

$$T : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+1}$$

$$(c_0, c_1, \ldots, c_n) \mapsto (-1)^n (-1)^{|c_0| . |(c_1, \ldots, c_n)|} (c_1, \ldots, c_n, c_0)$$

donde $|(c_1, \ldots, c_n)|$ denota el grado usual de $(c_1, \ldots, c_n)$ en el producto tensorial,

$$|(c_1, \ldots, c_n)| = |c_1| + \ldots |c_n|.$$

Si llamamos $\Delta_{n+1} := (-1)^{n+1} T \circ \Delta_0 : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+2}$, definimos

$$b : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+2}$$

$$b := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \Delta_i = b' - T \circ \Delta_0$$

Simple verificación muestra que $b^2 = bd + db = 0$, definimos entonces $\mathcal{C}_{Hoch}$ para el caso diferencial graduado como el complejo

$$\mathcal{C}_{Hoch}(C) := Tot(C(C), b, d)$$

Definición 9.1. *La* **coHomología de Hochschild** *de una k-coálgebra diferencial graduada C se define como $Hoch^*(C) := H^*(\mathcal{C}_{Hoch}(C))$*

Observación: 1. De manera análoga al caso no diferencial graduado, el complejo $\mathcal{C}_{Hoch}(C)$ es isomorfo al complejo $(C(C)\square_{C^e}C, (b' + d)\square id_C)$.
Observación: 2. Sea C una k-coálgebra concentrada en grado cero. Entonces es conocido que $Hoch^*(C) = Cotor_{C^e}(C, C)$, pues el complejo standard que calcula $Hoch^*(C)$ proviene de aplicar $C\square_{C^e}-$ a la resolución inyectiva standard de C como C^e-comódulo. Llamando $C(C)$ a la resolución standard de C, que es una resolución C^e-inyectiva, se tiene que

$$Hoch^*(C) = H^*(C(C)\square_{C^e}C) = H^*(C(C)\square_{C^e}C(C)) = H^*(C\square_{C^e}C(C)) = H^*(C\square^R_{C^e}C)$$

$$H^*(C) = Ext^*_{C^e}(C, C) = Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[*])$$

Para el caso diferencial graduado, se tiene la misma interpretación cohomológica de $Hoch^*$:

Lema 9.2. *Sea C una coálgebra diferencial graduada positiva, entonces $C(C)$ es un objeto cerrado en $Chain(C^e)$.*

Notar que ya sabíamos que para todo $M \in Chain(C)^+$, $C(M)^+$ es un objeto cerrado en $Chain(C)$, pero esto sólo dice que $C(C)$ es cerrado en $Chain(C)$ aunque no necesariamente en $Chain(C^e)$.

Demostración: Notamos que si $C \in Chain(k)$, entonces $C^e = C \otimes C^{op}$ también es un objeto de $Chain(k)^+$. En virtud de 7.15 basta ver que $C(C)_p$ es C^e-cerrado para todo $p > 0$. Demostraremos esto por inducción:
Si $p = 1$, $C(C)_1 = C \otimes C = C^e$ y es claro que es C^e cerrado. Para $p > 1$, se tiene una sucesión exacta corta que se parte en la categoría de C-comódulos graduados:

$$0 \to C^{\otimes p} \to C(C)_p \to C(C)_{p-1} \to 0$$

Por hipótesis inductiva, $C(C)_{p-1}$ es C^e-cerrado, por otro lado, $C^{\otimes p} = C \otimes C^{\otimes p-2} \otimes C$ es un complejo de la forma $C \otimes V \otimes C \cong C^e \otimes V$, por lo tanto, por la propiedad de extensión por espacios vectoriales (Corolario 7.18) resulta C^e-cerrado.

Corolario 9.3. *Sea C una k-coálgebra diferencial graduada tal que $C \in Chain(k)^+$, entonces*

$$Hoch^*(C) = H^*(C\square^R_{C^e}C)$$

Para H^* tomamos como definición $H^*(C) := Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[*])$. Esta caracterización permite demostrar sencillamente el siguiente teorema de invariancia:

Teorema 9.4. *Sean C y D dos k-coálgebras diferenciales graduadas positivas, y supongamos que existen ${}_CX_D \in Chain(C \otimes D^{op})$ e ${}_DY_C \in Chain(D \otimes C^{op})$ tales que $X\square^R_D Y \cong C$ en $\mathcal{D}(C^e)$ y $Y\square^R_C X \cong C$ en $\mathcal{D}(D^e)$, entonces $Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$ y $H^*(C) \cong H^*(D)$.*

Demostración: A partir de las hipótesis, se tienen isomorfismos en $\mathcal{D}(k)$:

$$C\square^R_{C^e}C \cong (X\square^R_D Y)\square^R_{C^e}(X\square^R_D Y) \cong (Y\square^R_C X)\square^R_{D^e}(Y\square^R_C X) \cong D\square^R_{D^e}D$$

Tomando homología en ambos miembros se tiene entonces $Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$.

Para H^*, tenemos que

$$H^n(C) = Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[n]) \cong$$
$$\cong Hom_{\mathcal{D}(D^e)}(Y\square^R_C C\square^R_C X, Y\square^R_C C[n]\square^R_C X) \cong$$
$$\cong Hom_{\mathcal{D}(D^e)}(D, D[n]) = H^*(D)$$

Corolario 9.5. *Sean C y D dos coálgebras usuales tales que existe un objeto basculante generalizado ${}_DT_C$, entonces $Hoch^*(C) \cong Hoch^*(D)$ y $H^*(C) \cong H^*(D)$.*

Demostración: utilizamos el Corolario 8.13, el cual nos dice que estamos precisamente en las hipótesis del teorema anterior.

Observación: El espacio graduado $H^*(C) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[n])$ es un álgebra graduada tomando como producto la composición de morfismos en $\mathcal{D}(C^e)$

$$\begin{tikzcd}
H^p(C) \times H^q(C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{p+q}(C) \arrow[d, equal] \\
Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[p]) \times Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[q]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[p+q]) \arrow[d, equal] \\
Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[p]) \times Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C[p], C[p+q]) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{D}(C^e)}(C, C[p+q])
\end{tikzcd}$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g$$

Si $F : \mathcal{D}(C^e) \to \mathcal{D}(D^e)$ es una equivalencia que conmuta con el funtor de traslación y que además verifica $F(C) \cong D$ (isomorfismo en $\mathcal{D}(D^e)$), entonces $H^*(C) \cong H^*(D)$ no sólo como k-espacios vectoriales sino también como álgebras graduadas. Tal es el caso cuando existen ${}_CX_D \in Chain(C \otimes D^{op})$ e ${}_DY_C \in Chain(D \otimes C^{op})$ tales que $X\square^R_D Y \cong C$ en $\mathcal{D}(C^e)$ y $Y\square^R_C X \cong C$ en $\mathcal{D}(D^e)$, tomando $F = Y\square^R_C - \square^R_C X : \mathcal{D}(C^e) \to \mathcal{D}(D^e)$.

9.2. CoHomología Cíclica

Notamos que para dar la definición de $Hoch^*$, hemos introducido todos los operadores necesarios para definir la cohomología cíclica. Hacemos un resumen de todas ellas:

1. el operador cíclico $T : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+1}$

$$(c_0, c_1, \dots, c_n) \mapsto (-1)^n (-1)^{|c_0|\cdot|(c_1,\dots,c_n)|}(c_1, \dots, c_n, c_0)$$

2. operadores cara, para $i = 0, \dots, n$, $\Delta_i : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+2}$

$$(c_0, \dots, c_n) \mapsto (c_0, \dots, \Delta(c_i), \dots, c_n)$$

   y $\Delta_{n+1} := (-1)^{n+1} T \circ \Delta_0$.

3. el diferencial $d : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+1}$

$$(c_0, \dots, c_n) \mapsto (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{|c_{i_0}|+\dots+|c_{i_{k-1}}|}(c_{i_1}, \dots, d_C(c_{i_k}), \dots, c_{i_n}) \right)$$

4. el borde $b' = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \Delta_i$ y el borde $b = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \Delta_i$.
5. la norma $N := \sum_{i=0}^{n} T^i : C^{\otimes n+1} \to C^{\otimes n+1}$

Dado que $b + d$ y $b' + d$ son operadores de cuadrado cero, tenemos que $b'^2 = b^2 = bd + db = b'd + db' = 0$. Al igual que en el caso no diferencial graduado, son válidas las siguientes relaciones:

Lema 9.6. *Con las notaciones anteriores:*

$$T^n_{C^{\otimes n}} = id \ \ ; \ \ Nb' = bN$$

$$(1 - T)N = N(1 - T) = 0 \ \ ; \ \ (1 - T)b = b'(1 - T)$$

Demostración: Son consecuencia formal de las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} T\Delta_i = -\Delta_{i-1} T & \text{donde } i = 1, \dots, n \\ T\Delta_0 = (-1)^{n+1}\Delta_{n+1} \end{cases}$$

La identidad $T\Delta_i = -\Delta_{i-1}T$ se demuestra por cálculo directo, la igualdad $T\Delta_0 = (-1)^{n+1}\Delta_{n+1}$ es la definición misma de Δ_{n+1}

Lema 9.7. *Con las mismas notaciones, d conmuta con T, y por lo tanto con $(id - T)$ y con N.*

Demostración: Es un cálculo directo.

Queda entonces definido un complejo doble, que llamaremos $C^{**}(C)$:

$$\cdots \xleftarrow{1-T} \mathcal{C}_{Hoch}(C)[-4] \xleftarrow{N} C(C)[-3] \xleftarrow{1-T} \mathcal{C}_{Hoch}(C)[-2] \xleftarrow{N} C(C)[-1] \xleftarrow{1-T} \mathcal{C}_{Hoch}(C)$$

Definimos la cohomología cíclica de una coálgebra diferencial graduada como la cohomología del complejo total asociado al este complejo doble, y la denotaremos $HC^*(C)$. Al igual que en el caso no diferencial graduado, tenemos el siguiente resultado, útil para extraer propiedades de $HC^*(C)$ a partir de $Hoch^*(C)$:

Teorema 9.8. *(SBI) Sea C una k-coálgebra diferencial graduada, entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow HC^n(C) \xrightarrow{S} HC^{n+2}(C) \xrightarrow{I} Hoch^{n+2}(C) \xrightarrow{B} HC^{n+1}(C) \longrightarrow \cdots$$

Demostración: es igual al caso no diferencial graduado, notamos que en la definición de $CC^{**}(C)$ hay una periodicidad evidente de período 2; trasladamos el complejo $CC^{**}(C)$ dos lugares 'hacia arriba' y obtenemos así una sucesión exacta corta de complejos dobles:

$$0 \to Tot \left(\begin{array}{c} \vdots \\ {\scriptstyle 1-T}\Big\uparrow \\ \mathcal{C}_{Hoch}(C)[-4] \\ {\scriptstyle N}\Big\uparrow \\ C(C)[-3] \\ {\scriptstyle 1-T}\Big\uparrow \\ \mathcal{C}_{Hoch}(C)[-2] \\ \Big\uparrow \\ 0 \\ \Big\uparrow \\ 0 \end{array} \right) \to Tot \left(\begin{array}{c} \vdots \\ {\scriptstyle 1-T}\Big\uparrow \\ \mathcal{C}_{Hoch}(C)[-4] \\ {\scriptstyle N}\Big\uparrow \\ C(C)[-3] \\ {\scriptstyle 1-T}\Big\uparrow \\ \mathcal{C}_{Hoch}(C)[-2] \\ {\scriptstyle N}\Big\uparrow \\ C(C)[-1] \\ {\scriptstyle 1-T}\Big\uparrow \\ \mathcal{C}_{Hoch}(C) \end{array} \right) \to Tot \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \Big\uparrow \\ 0 \\ \Big\uparrow \\ 0 \\ \Big\uparrow \\ 0 \\ \Big\uparrow \\ C(C)[-1] \\ {\scriptstyle 1-T}\Big\uparrow \\ \mathcal{C}_{Hoch}(C) \end{array} \right) \to 0$$

Hemos obtenido así una sucesión exacta corta $0 \to C^{**}(C)[-2] \to C^{**}(C) \to Co(1-T)[1] \to 0$. Como $C(C)$ es acíclico, se sigue $Co(1-T)[1]$ es quasi-isomorfo a $\mathcal{C}_{Hoch}(C)$. Los otros dos complejos calculan $HC^*(C)$ y $HC^*(C)[-2]$, luego la sucesión exacta larga del teorema es consecuencia de la sucesión exacta larga en homología.

Corolario 9.9. *Sea $f : C \to D$ un morfismo comultiplicativo tal que $f^* : Hoch^*(C) \to Hoch^*(D)$ es un isomorfismo, entonces f induce un isomorfismo $f^* : HC^*(C) \to HC^*(D)$.*

Como caso particular, se tiene:

Corolario 9.10. *Sea $f : C \to D$ un quasi-isomorfismo de k-coálgebras diferenciales graduadas positivas, entonces $f^* : HC^*(C) \cong HC^*(D)$.*

Referencias

[Co 85] Alain Connes: *Non commutative differential geometry*. Publ. math. IHES **62** (1985), 41 - 144.

[D-I 82] Keith Dennis - K. Igusa: *Hochschild homology and the second obstruction for pseudo-isotopy*. Lect. Notes Math. **966** (1982), p. 7 - 58.

[DeR] Georges De Rham: *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples*

[Doi 81] Yukio Doi: *Homological coalgebra*. J. Math. Soc. Japan. **33** No. 1 (1981), 31 - 50.

[F-S 98a] Marco A. Farinati - Andrea L. Solotar: *Morita - Takeuchi equivalence, cohomology of coalgebras and Azumaya coalgebras*. "Rings, Hopf modules, and Brauer groups", Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 197, Ed. Marcel Dekker (1998).

[F-S 98b] Marco A. Farinati - Andrea L. Solotar: *Localization on (necessarily) topological coalgebras and cohomology* J. of Alg. **208** (1998), 575 - 603.

[F-S 99a] Marco A. Farinati - Andrea L. Solotar: *A Hochschild - Kostant - Rosenberg Theorem for Coalgebras*, preprint (1999).

[F-S 99b] Marco A. Farinati - Andrea L. Solotar: *Cyclic Homology of Coalgebras* aceptado para su publicación en "Hopf algebras and Quantum Groups", Lecture Notes in Pure and App. Mathematics (Marcel Dekker).

[Get 94] Ezra Getzler: *The equivariant Chern character for non-compact Lie groups*, Adv. in Math. **109(1)** (1994), 88 - 107.

[G-M 96] Sergei I. Gelfand - Yuri I. Manin: *Methods of Homological Algebra*, Springer 1996.

[Gro 65] Alexandre Grothendieck: *Produits tensoriels et espaces nucleaires*, Mem. A.M.S. **16** (1965).

[Gro 57] Alexandre Grothendieck: *Sur quélques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9**, (1957) 119 - 221.

[Har 66] Robin Hartshorne: *Residues and Duality*, Lect. N. Math. **20**, Springer, 1966.

[Ka 88] Christian Kassel: *K-théorie algébrique et cohomologie cyclique bivariantes*, C.R.A.S. **306** (1988), 799 - 802.

[Ke 94a] Bernhard Keller: *Deriving DG categories*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série **27** (1994). 63 - 102.

[Ke 94b] Bernhard Keller: *Tilting theory and differential graded algebras*, Proc. of the Nato ARW on representation of algebras and related topics, edited by V.Dlab and L. Scott, Kluwer (1994).

[Ko 97] Maxim Kontsevich: *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, http://xxx.lanl.gov/abs/q-alg/9709040.

[Lo 92] Jean-Louis Loday: *Cyclic homology* Der Grund. Math. Wiss. **301**, Springer Verlag (1992).

[McC 88] Randy McCarthy: *L'équivalence Morita et homologie cyclique*. C.R.A.S. **307** (1988), 211 - 215.

[Mont 93] Susan Montgomery: *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Nro. **82** AMS (1993).

[R-S 94] Batildo Requejo-J.Sancho: *Localization in the rings of continuous functions*, Topology and Appl. **57** (1994), 87 - 93.

[Mal 86] Anastasios Mallios: *Topological algebras: selected topics*, North Holland, Math. Studies **124** (1986).

[Ri89] Jeremy Rickard: *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc (2) **39** (1989), 436 - 456.

[Sw 69] Moss Sweedler: *Hopf algebras* Benjamin. New York. (1969)

[Tak 77a] Mitsushiro Takeuchi: *Morita theorems for categories of comodules*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), 1483 - 1528.

[Tak 77b] Mitsushiro Takeuchi: *Formal Schemes over fields*, Comm. in Alg. **5** (1977), 1483 - 1528.

[Tak 85] Mitsushiro. Takeuchi: *Topological Coalgebras*, J. of Alg. **97** (1985), 505 - 539.

[Tay 72a] Joseph L. Taylor: *Homology and cohomology for topological algebras*, Adv. in Math. **9(2)** (1972), 137 - 182.

[Tay 72b] Joseph L. Taylor: *A general framework for a multi-operator functional calculus*, Adv. in Math. **9(2)** (1972), 183 - 252.

[Trè 67] François Trèves: *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press 1967.

[Ver 77] Jean-Louis Verdier: *Categories derivées, état cero*, Springer Lect. Notes **569** (1977), 262 - 311.