

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Soluciones con tiempo de espera de la
ecuación de difusión no lineal

por

Carlos Alberto Perazzo

Director de Tesis: Dr. Julio Gratton

Lugar de Trabajo: Dpto. de Física y Química de la Universidad Favaloro, e Instituto de Física del Plasma, Conicet, Dpto. de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Junio de 2002

Resumen

Investigamos en detalle las soluciones con tiempo de espera de ecuaciones de difusión no lineal de la forma $\partial_t h = \partial_x (h^m \partial_x h)$ ($m > 0$). Con este objetivo obtuvimos las soluciones numéricas para diferentes valores del parámetro de no linealidad m y para condiciones iniciales de la forma $h(x, 0) \propto x^{\alpha q}$ ($q = 2/m$). Si $\alpha \geq 1$ las soluciones tienen un tiempo de espera $t_w = t_w(m, \alpha)$, *i.e.* un intervalo finito de tiempo en el cual el frente se mantiene en reposo antes de comenzar a moverse. En trabajos previos hemos estudiado en detalle los casos $m = 3$, que corresponde a corrientes viscogravitatorias, y $m = 1$, que describe el flujo isotérmico de un gas a través de un medio poroso y el flujo de acuíferos no confinados. Aquí investigamos numéricamente las soluciones con tiempo de espera para $1/2 \leq m \leq 9$. Mostramos las soluciones en detalle, y estudiamos la influencia que m y α tienen sobre el tiempo de espera así como sobre otras propiedades de las soluciones obtenidas. El comportamiento de las soluciones es cualitativamente el mismo para todo m , pero difieren cuantitativamente como así también en varios detalles. Determinamos t_w y la velocidad de arranque del frente \hat{c} como funciones de m y α . Encontramos que los valores de $\mathcal{T}(m, \alpha) = (t_w^{1/m} - t_1^{1/m}) / (t_\infty^{1/m} - t_1^{1/m})$ y $\mathcal{C}(m, \alpha) = (\hat{c}_w^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m}) / (\hat{c}_\infty^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m})$ para el rango antes mencionado de m caen con buena aproximación sobre una única curva empírica universal (t_1 , t_∞ , \hat{c}_1 , y \hat{c}_∞ se expresan por medio de fórmulas conocidas). Hacemos un estudio detallado del corner layer (un pequeño intervalo Δx en el cual h_x varía fuerte-

mente). Además investigamos las asintóticas intermedias cerca del frente que espera y próximo al momento de su arranque. Detectamos dos regímenes autosemejantes: el primero aparece en un dominio cercano al corner layer que está llegando al frente, y el otro aparece en un dominio detrás del corner layer pero un poco más lejos de él que el primero. El primer régimen tiende a una onda viajera con velocidad constante, mientras que el segundo pertenece a un tipo diferente de autosemejanza.

Palabras claves: difusión no lineal, tiempo de espera, autosemejanza.

Waiting-time solutions of nonlinear diffusion equations

Abstract

We investigate in detail the waiting-time solutions of nonlinear diffusion equations of the form $\partial_t h = \partial_x (h^m \partial_x h)$ ($m > 0$). To this purpose we obtain the numerical solutions for different values of the nonlinearity parameter m and for initial conditions of the form $h(x, 0) \propto x^{\alpha q}$ ($q = 2/m$). If $\alpha \geq 1$ the solutions have a waiting-time $t_w = t_w(m, \alpha)$, *i.e.* a finite time interval in which the front is at rest before starting to move. In previous works we studied in detail the cases $m = 3$, corresponding to viscous gravity currents, and $m = 1$, that describe isothermal gaseous percolation through a porous medium and flow in unconfined aquifers. Here we investigate the (numerical) waiting-time solutions for $1/2 \leq m \leq 9$. The solutions are shown in detail and the m and α dependence of the waiting time as well as other properties are studied. The behaviour of the solutions is qualitatively the same for all m , but they differ quantitatively as well as in many details. We determine t_w and the start-up velocity \hat{c} as functions of m and α . We find that the values of $\mathcal{T}(m, \alpha) = (t_w^{1/m} - t_1^{1/m}) / (t_\infty^{1/m} - t_1^{1/m})$ and $\mathcal{C}(m, \alpha) = (\hat{c}_w^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m}) / (\hat{c}_\infty^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m})$ for the above mentioned range of m fall with good approximation on single universal empirical curves (here t_1 , t_∞ , \hat{c}_1 , and \hat{c}_∞ are given by known formulae). We make a detailed study of the growth and

evolution of the corner layer (the small interval Δx in which h_x varies strongly). We also investigate the intermediate asymptotics close to the front and near start-up. We detect two self-similar regimes: the first one appears in a domain close to the corner layer that is arriving at the front and the other occurs in a domain behind the corner layer but a little farther from it than the first one. The first regime approaches a constant velocity traveling wave, while the second one belongs to a different type of self-similarity.

Key words: nonlinear diffusion, waiting-time, self-similarity

A mis padres, Beatriz y Carlos

Índice General

1	Introducción	5
1.1	Generalidades	5
1.2	Aplicación a derrame de fluidos	13
1.3	Flujos en Medios Porosos	16
1.3.1	Flujo gaseoso a través de un medio poroso	19
1.3.2	Flujo en acuíferos no confinados	20
1.4	Penetración de campos magnéticos en medios no lineales	23
1.5	Conducción térmica radiativa	28
1.6	Generalizaciones de la ecuación de difusión no lineal	31
1.6.1	Generalización a $m < 0$	32
1.6.2	Generalización a más dimensiones	32
1.6.3	Derrame de fluidos no Newtonianos	33

	2
1.6.4	Ecuación de difusión no lineal con un término de reacción 33
1.6.5	Ecuación de Fokker-Planck no lineal 35
2	Teoría 37
2.1	Algunas soluciones analíticas de interés 38
2.1.1	La solución fundamental 38
2.1.2	La onda viajera 40
2.1.3	La solución singular 45
2.2	El tiempo de espera y la velocidad de arranque 46
2.2.1	Condiciones para la existencia de un tiempo de espera 47
2.2.2	Cotas para el tiempo de espera 48
2.2.3	Velocidad de arranque del frente 52
2.3	Soluciones autosemejantes 53
2.3.1	Formalismo del plano de fases 54
2.3.2	Autosemejanza cerca del frente que espera 66
2.4	Propiedades de escala de la ecuación de difusión no lineal . . . 85
3	Métodos 87
3.1	Método Numérico 87
3.2	Métodos de análisis 91

	3
3.2.1	Determinación de t_w 92
3.2.2	Posición y evolución del corner layer 94
3.2.3	Determinación de las asintóticas 97
3.2.4	Determinación de la velocidad de arranque 100
4	Resultados 102
4.1	Propiedades generales de las soluciones numéricas 102
4.2	El tiempo de espera y la velocidad de arranque como funciones de α y m 106
4.3	La evolución del corner layer 109
4.4	El desarrollo de regímenes autosemejantes 112
4.5	Cotas y estimaciones del tiempo de espera para otras condi- ciones iniciales 135
4.5.1	Ejemplo de aplicación de nuestros resultados 136
5	Discusiones y conclusiones 141
5.1	Eliminación aproximada de la dependencia en m 141
5.2	Propiedades generales de las soluciones 145
5.3	Propiedades asintóticas de las soluciones 145
5.4	Conclusiones 147

	4
Referencias	148
Agradecimientos	154

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

Existe una gran diversidad de fenómenos descritos por la ecuación de difusión no lineal (también llamada ecuación de medios porosos por algunos autores). Dicha ecuación en el caso unidimensional se escribe en la forma

$$\partial_t h = \partial_x (h^m \partial_x h) \quad h \equiv h(x, t) \geq 0 \quad (1.1)$$

donde x es una coordenada cartesiana, t es el tiempo, y el significado de la variable que difunde h y el valor del índice de no linealidad m dependen del problema específico bajo estudio. Algunos ejemplos se dan en la Tabla 1.1; habitualmente aparece en la ecuación (1.1) una constante con dimensiones que puede ser absorbida por medio de una adecuada redefinición de h . En este trabajo sólo se considera $m > 0$. Además, la ecuación (1.1) es un caso

particular de una generalización no lineal de la ecuación de Fokker-Planck (Drazer et al. 2000).

Tabla 1.1: Diferentes fenómenos de difusión no lineal

m	Fenómeno	h	Referencias
1	Flujo en acuiferos no confinados	Altura	Polubarinova-Kochina, 1962 Eagleson, 1970 Peletier, 1981
≥ 1	Dispersión de poblaciones	Concentración	Gurtin & MacCamy, 1977
≥ 1	Flujo gaseoso en un medio poroso	Densidad	Muskat, 1937
3	Corrientes viscogravitatorias sobre una superficie horizontal	Altura	Buckmaster, 1977 Huppert, 1982 Gratton & Minotti, 1990
5/2	Conducción térmica en plasmas	Temperatura	Zel'dovich & Raizer, 1966
4.5 5.5	Conducción térmica en gases múltiplemente ionizados	Temperatura	Marshak, 1958 Zel'dovich & Raizer, 1966 Pert, 1977 Larsen & Pomraning, 1980
13/2	Conducción térmica en gases totalmente ionizados	Temperatura	Marshak, 1958 Zel'dovich & Raizer, 1966 Pert, 1977 Larsen & Pomraning, 1980
≥ 6	Penetración de campos electromagnéticos en medios no lineales	Campo magnético	Mayergoyz, 1998
≥ 6	Penetración de campos electromagnéticos en superconductores tipo II	Densidad de corriente	Mayergoyz, 1998

La ecuación (1.1) se puede escribir como una ecuación de conservación

$$\partial_t h + \partial_x(uh) = 0 \tag{1.2}$$

donde $u \equiv u(x, t)$ es la *velocidad* con la que se desplaza h , y está definida por

$$u = -h^{m-1} \partial_x h \tag{1.3}$$

El par de ecuaciones (1.2) y (1.3) equivalen a la ecuación (1.1).

Las soluciones de la ecuación (1.1) pueden tener frentes (llamados interfaces en la literatura matemática) que se desplazan con velocidad finita. Más precisamente, si $h(x, t_a)$ tiene soporte finito al tiempo t_a , entonces para todo $t > t_a$, $h(x, t)$ también tendrá soporte finito. La posición $x_f(t)$ de un frente es una función continua y monótona del tiempo. Bajo ciertas condiciones el frente puede permanecer en reposo durante un cierto intervalo de tiempo, luego del cual comienza a moverse y nunca se detiene. Este comportamiento se conoce como el *fenómeno del tiempo de espera*, y está estrechamente vinculado a la aparición en la solución de *corner layers* (pequeños intervalos Δx en los cuales $\partial_x h$ varía abruptamente)¹ (ver figura 1.1). Para comprender porqué las soluciones de la ecuación (1.1) presentan estas propiedades es útil definir las variables $\eta = h^m$ y $\tau = t/m$, con las cuales dicha ecuación toma la forma

$$\partial_\tau \eta = (\partial_x \eta)^2 + m\eta \partial_{xx} \eta \quad (1.4)$$

Esta expresión muestra que la evolución de η es el resultado de la combinación de dos efectos: uno de propagación no lineal de ondas, representado por el término $(\partial_x \eta)^2$, y el otro de difusión no lineal, representado por $m\eta \partial_{xx} \eta$. El primero de estos términos tiende a generar discontinuidades de η (*corner shocks*) y el segundo tiende a suavizarlas, dando como resultado un *corner*

¹En este trabajo usaremos el término *corner layer* pese a no pertenecer al idioma castellano dado que es el que se emplea habitualmente en la literatura y además porque no le encontramos una traducción castellana satisfactoria.

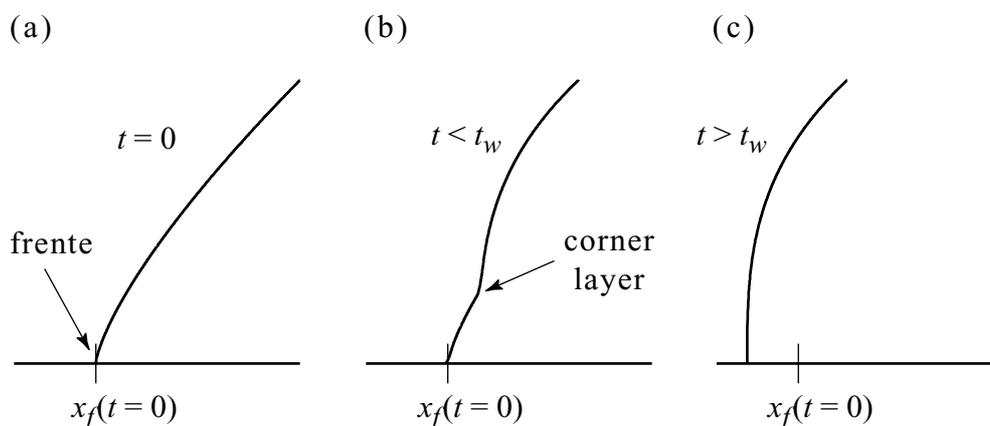


Figura 1.1: En (a) se muestra un perfil inicial. En (b) se muestra el perfil en un instante posterior, pero aún en el período de espera. Obsérvese que la posición del frente en (a) y en (b) es la misma, pero no son iguales los perfiles. También se muestra en (b) un corner layer. En (c) se muestra el perfil en un instante posterior al arranque del frente, por lo que éste se encuentra desplazado respecto de su posición inicial.

layer (Kath y Cohen 1982). Las cantidades relacionadas con un corner layer se indicarán con el sufijo c .

Varios autores han investigado las soluciones con tiempo de espera de la ecuación (1.1). La mayoría de estos trabajos son de carácter teórico (Aronson 1970; Knerr 1977; Kamin 1980; Kath y Cohen 1982; Lacey et al. 1982; Lacey 1983; Aronson et al. 1985). Algunos resultados experimentales sobre corrientes viscogravitatorias con tiempo de espera ($m = 3$) fueron obtenidos por Thomas et al. (1991), Gratton et al. (1992) y Marino et al. (1996), y también se han publicado estudios numéricos (Perazzo et al. 1999; Gratton y Vigo 1998).

En lo siguiente asumiremos que el proceso comienza en $t = t_i$, y la condición inicial es $h(x, t_i) = g(x)$ tal que $g(x) = 0$ para $x < x_f$; entonces, para una adecuada elección de $g(x)$ el frente permanecerá en reposo durante un intervalo finito de tiempo t_w mientras $h(x > x_f, t)$ cambia. En otras palabras, $x_f(t) = x_f(t_i)$ para $t_i \leq t \leq t_i + t_w$. Sin pérdida de generalidad fijamos $t_i = -t_w$ de modo que el período de espera finaliza en $t = 0$.

Dado que es claramente imposible investigar numéricamente todas las condiciones iniciales concebibles que llevan a una solución con tiempo de espera, debemos restringir nuestra elección de los datos iniciales. Consideraremos condiciones iniciales de la forma

$$g(x) = g_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ Kx^{\alpha q} & (0 \leq x \leq x_0) \end{cases} \quad (1.5)$$

con

$$q = 2/m \quad K > 0 \quad \alpha > 1 \quad (1.6)$$

Por lo tanto nuestras $g_\alpha(x)$ representan todos los comportamientos regulares de g cerca del frente que espera. Con estas hipótesis la teoría garantiza soluciones con tiempo de espera (Kath y Cohen 1982; Vázquez 1984) pero no predice el valor exacto de t_w ni el valor \hat{c} de la velocidad del frente al arranque.

En este trabajo investigamos en detalle las soluciones de (1.1) y (1.5), y analizamos la influencia que las condiciones iniciales y el parámetro de no

linealidad m tienen sobre el tiempo de espera, la velocidad de arranque del frente, y la formación y evolución del corner layer. Con estos objetivos resolvemos numéricamente las ecuaciones (1.1) y (1.5) para 7 valores de m en el intervalo $1/2 \leq m \leq 9$, y varios valores de α para cada m ($\alpha > 1$ para obtener soluciones con tiempo de espera). Dado que tratamos con soluciones numéricas de (1.1), x debe ser finito. Por lo tanto asumimos que $x \leq x_0$, y en $x = x_0$ (a este punto lo llamaremos “la pared”) debemos imponer alguna condición de contorno que nosotros elegiremos como $\partial_x h(x_0, t) = 0$ (condición de pared rígida o de ausencia de flujo). Entonces nuestro problema de condiciones iniciales involucra las siguientes escalas características

$$\begin{aligned} x_0 \\ h_0 &\equiv g(x_0) \\ t_0 &\equiv x_0^2/h_0^m \end{aligned} \tag{1.7}$$

(h_0 puede ser cualquier valor típico de $g(x)$, el valor de h_0 dado en la expresión anterior es sólo una de las elecciones posibles).

A partir de las soluciones numéricas determinamos t_w y la velocidad de arranque $\hat{c} \equiv |\dot{x}_f(t = 0+)|$ como funciones de α y m . Si definimos $t_1 = t_w(m, \alpha = 1)$, $t_\infty = t_w(m, \alpha \rightarrow \infty)$, $\hat{c}_1 = \hat{c}(m, \alpha = 1)$ y $\hat{c}_\infty = \hat{c}(m, \alpha \rightarrow \infty)$, cantidades todas que se pueden calcular a partir de fórmulas conocidas (ver Capítulo 2), encontramos que los valores de $\mathcal{T}(m, \alpha) = (t_w^{1/m} - t_1^{1/m}) / (t_\infty^{1/m} - t_1^{1/m})$ y $\mathcal{C}(m, \alpha) = (\hat{c}^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m}) / (\hat{c}_\infty^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m})$ para nuestro rango de m y α caen con buena aproximación sobre una curva universal empírica. Este resultado, al que no le hallamos una explicación teórica, permite obtener valores aproximados de t_w y \hat{c} para valores de m y α distintos a los utilizados en este trabajo.

En nuestras soluciones numéricas, para todo m y α se desarrolla siempre un único corner layer durante el período de espera. Dicho corner layer se forma más tempranamente para m y α mayores, y más cerca del frente para m mayores y α menores. El corner layer se desplaza hacia el frente, y hacia el fin del período de espera (excepto para m grande) lo hace con velocidad constante. Esta velocidad coincide siempre con la velocidad de arranque del frente.

También nos interesará el comportamiento asintótico de las soluciones cerca del frente y próximo al momento del arranque. Como fue dicho anteriormente, nuestro problema de condiciones iniciales posee las escalas características x_0 , h_0 y t_0 . Por lo tanto la solución *no* es autosemejante. Sin embargo, cerca del frente y próximo al momento del arranque dichas escalas son irrelevantes, luego no hay escalas características de x , t y h , por lo que en este dominio la solución *puede* ser autosemejante de Segunda Especie (Barenblatt 1979), dependiendo de una única variable de la forma $\zeta = x/bt^\delta$ (b y δ son constantes). En autosemejanzas de Segunda Especie δ no es conocido *a priori*, y debe ser determinado ya sea teóricamente (construyendo la solución) o siguiendo experimental o numéricamente la evolución de la solución. Por otra parte, b sólo se puede determinar experimental o numéricamente. Notemos, sin embargo, que la teoría *no garantiza* que el problema de valores iniciales (1.1), (1.5) en verdad desarrolle una asintótica autosemejante.

Una familia de soluciones autosemejantes con tiempo de espera con $\delta > 1$ (a la que llamaremos soluciones LOT), que puede describir esta asintótica (ver Capítulo 2), ha sido encontrada por Lacey, Ockendon, y Tayler (1982). Otra familia de soluciones autosemejantes con tiempo de espera, que llamaremos soluciones A, puede también resultar de interés en este contexto; estas

soluciones tienen $\delta \leq 1$ y contienen a la solución tipo onda viajera (Aronson et al. 1983) para la cual $\delta = 1$ (ver Sección 2.1). Dado que tenemos infinitas soluciones disponibles, el espectro de δ es continuo; por lo tanto, para m y α dados, no podemos conocer de antemano qué particular valor de δ se va a obtener. En relación con esto, ha sido conjeturado (pero no probado) que, cuando el espectro de δ es continuo, son las condiciones iniciales quienes determinan el valor seleccionado (Barenblatt y Zel'dovich 1972). Ya que la teoría no provee el valor de δ ni asegura que la asintótica cerca del frente y próximo al arranque sea autosemejante, estas cuestiones deben ser estudiadas por medios experimentales o numéricos. Clarificar estos asuntos es uno de los principales objetivos de este trabajo.

El análisis de la asintótica intermedia revela un aspecto curioso: hay *dos* dominios donde las soluciones numéricas muestran comportamientos autosemejantes diferentes. Primero, hacia el fin del período de espera, muy cerca del corner layer se desarrolla una asintótica del tipo onda viajera. Segundo, un poco más atrás del corner layer, pero aún lejos de la pared, la solución numérica se aproxima a una solución LOT cuyo δ depende de las condiciones iniciales, probando que la conjetura de Barenblatt y Zel'dovich (1972) es verdad en el presente caso.

En el resto de este Capítulo se mostrará cómo se arriba a la ecuación (1.1) en algunos de los ejemplos que han sido mencionados en la Tabla 1.1. En el siguiente Capítulo, revisaremos algunos resultados teóricos previos acerca de las soluciones con tiempo de espera, que necesitaremos para discutir nuestros resultados. El código numérico y los métodos empleados para estudiar las soluciones numéricas obtenidas se explican en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 se presentan los resultados, y las discusiones y conclusiones se exponen en

el Capítulo 5.

1.2 Aplicación a derrame de fluidos

Aquí se hallarán las ecuaciones que gobiernan el derrame de fluidos Newtonianos sobre una superficie plana horizontal a bajo número de Reynolds, donde el movimiento es gobernado por el balance entre la fuerza viscosa y la gravedad (Huppert 1982). Como se muestra en la figura (1.2), considerare-

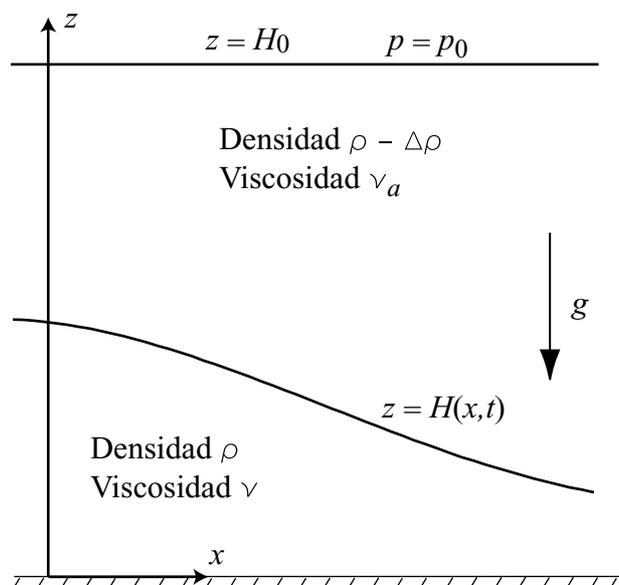


Figura 1.2: Geometría del problema

mos un fluido de densidad ρ , que se mueve desplazando a un fluido ambiente con densidad $\rho - \Delta\rho$ ($\Delta\rho > 0$) y profundidad H_0 . No se tomarán en cuenta los efectos de la tensión superficial en la interfase ni en el frente, lo que requiere que el número de Bond $B = \rho g' L / T$ sea mucho menor que 1 ($g' = (\Delta\rho/\rho)g$ es la aceleración de la gravedad reducida, L es la longitud de la corriente, y

T es el coeficiente de tensión superficial). Asumiremos que la longitud de la corriente excede ampliamente a su altura $H = H(x, t)$, lo que permite decir que la componente vertical de la velocidad es despreciable, y que la presión es hidrostática, y está dada por

$$p = p_0 + (\rho - \Delta\rho)g(H_0 - H) + \rho g(H - z) \quad (1.8)$$

donde p_0 es la presión constante a $z = H_0$. El balance entre el gradiente de presión y las fuerzas viscosas queda así expresado por

$$\frac{1}{\rho}\partial_x p = g'\partial_x H = \nu\partial_{zz}u \quad (1.9)$$

En el miembro derecho de (1.9) se despreciaron las derivadas horizontales en comparación con las verticales, dado que la longitud de la corriente es mucho mayor que su altura.

En la base de la corriente se impone la condición

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (1.10)$$

y en la interfase el esfuerzo de corte debe ser continuo

$$\mu\partial_z u = \mu_a\partial_z u_a \quad \text{en } z = H \quad (1.11)$$

donde el subíndice a se refiere a cantidades en el fluido ambiente. El movimiento en este fluido se debe a difusión viscosa, y por lo tanto el orden de magnitud

del cociente entre el miembro derecho y el izquierdo de (1.11) es $H^*/(\nu_a t)^{1/2}$, donde H^* es un valor característico de la altura de la corriente. Cuando la corriente se propaga bajo la condición de que exista un balance entre las fuerzas viscosa y gravitatoria, dicho cociente es mucho menor que la unidad, de lo que resulta que el esfuerzo de corte en la interfase es mucho menor que en el interior de la corriente. Por lo tanto, la ecuación (1.11) se puede aproximar como

$$\partial_z u = 0 \quad \text{en } z = H \quad (1.12)$$

La solución de (1.9), (1.10) y (1.12) es

$$u(x, z, t) = -\frac{g'}{2\nu} \partial_x H z (2H - z) \quad (1.13)$$

La conservación de la masa permite establecer una relación adicional entre las variables u y H

$$\partial_t H + \partial_x \left(\int_0^H u dz \right) = 0 \quad (1.14)$$

Sustituyendo (1.13) en esta última ecuación se obtiene

$$\partial_t H = \frac{g'}{3\nu} \partial_x (H^3 \partial_x H) \quad (1.15)$$

Si ahora definimos $h \equiv (g'/3\nu)^{1/3}H$ y reemplazamos en la expresión anterior, obtenemos la ecuación de difusión no lineal (1.1) con $m = 3$. Por lo tanto, la ecuación (1.1) describe el comportamiento de corrientes viscogravitatorias, si interpretamos a h como la altura de la corriente (multiplicada por el factor de escala $(g'/3\nu)^{1/3}$), y si $m = 3$.

1.3 Flujos en Medios Porosos

En esta Sección se mostrará como en ciertas circunstancias, la ecuación (1.1) describe flujos en medios porosos. Para un estudio detallado de este tema se puede recurrir a Barenblatt et al. (1990).

Entendemos por medio poroso a un medio constituido por una fase sólida, que puede ser continua o discontinua, que contiene espacios vacíos, llamados poros (ver figura 1.3). Ejemplos de este tipo de medios son: esponjas, tejidos, papel, tierra, hormigón, algunas rocas, ladrillos, etc. Cuando los poros no están conectados entre sí el medio es impermeable. Cuando los poros están conectados entre sí (y este es el caso que nos interesa) al medio se lo llama permeable.

La propiedad más importante de un medio poroso es su *porosidad* r . Para definirla elegimos un punto x del medio, y alrededor de él un volumen V . Sea V_p el volumen de los poros dentro del volumen V . Si se disminuye el volumen V , pero manteniéndolo grande comparado al volumen de un poro, el cociente V_p/V tiende a un valor constante al que se define como la porosidad r del medio en el punto x :

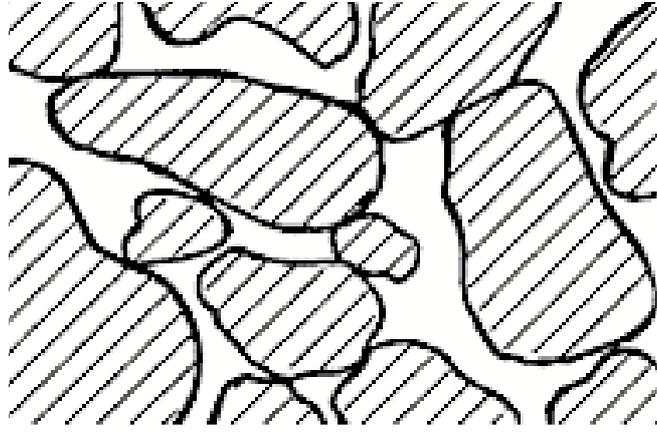


Figura 1.3: Estructura de un medio poroso. Las zonas rayadas indican la fase sólida, y las zonas en blanco son los poros.

$$r = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{V_p}{V} \quad (1.16)$$

Debemos recordar que en esta definición el límite es un límite intermedio, en el sentido que V debe ser mantenido grande respecto al volumen de un poro.

Tomemos un punto arbitrario M del medio poroso y centrado en él pongamos un elemento de superficie plano de área ΔS . A través de este elemento de superficie, en la dirección de su normal n , pasa por unidad de tiempo una masa de fluido ΔQ . Ahora se puede definir la *velocidad superficial* \vec{u} del fluido en la dirección n y en el punto M , como el límite intermedio (en el mismo sentido que en el párrafo anterior) del cociente $\Delta Q / \rho \Delta S$, donde ρ es la densidad del fluido. Notemos que se divide por el área total ΔS y no por el área ocupada por los poros.

Vale la pena destacar que la velocidad superficial *no* es la velocidad re-

al del fluido dentro de los poros. Realizar una medición de la verdadera velocidad del fluido en un punto del medio poroso, además de carecer de interés práctico, es sumamente difícil. Por otra parte, cualquier estudio teórico o numérico hecho con el objeto de calcular esta velocidad requeriría del conocimiento detallado de la tortuosa estructura de los poros, lo cual es virtualmente imposible. Por el contrario, la velocidad superficial es fácilmente accesible experimentalmente, y permite desarrollar una teoría (y de aquí los cálculos numéricos que se requieran), sin tener una descripción detallada del medio poroso, sino tan sólo caracterizándolo por medio de pocos parámetros macroscópicos, como por ejemplo la porosidad. Hecha esta aclaración, por razones de simplicidad de ahora en más nos referiremos a la velocidad superficial simplemente como la velocidad.

Provistos de las definiciones anteriores, tomando un elemento arbitrario de volumen, y haciendo un balance de masa del fluido dentro del medio poroso es fácil obtener la ecuación de continuidad:

$$\partial_t (r\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = 0 \quad (1.17)$$

En contraste con la hidrodinámica general, en la teoría de flujos en medios porosos existe una relación local entre el gradiente de presión $\vec{\nabla}p$ y el vector velocidad del fluido \vec{u} conocida como ley de Darcy:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu}\vec{\nabla}p \quad (1.18)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, y $k = k(r)$ es la *permeabilidad*, una propiedad puramente geométrica del medio poroso, independiente del fluido. Debe señalarse que p es en verdad la diferencia entre la presión total y la presión hidrostática: en ausencia de flujo, la presión en los poros se distribuirá de acuerdo a la ley hidrostática, y tan pronto como se inicia el flujo el exceso de presión (por encima de la presión hidrostática) se torna no homogéneo. La relación (1.18) fue establecida experimentalmente en 1856 por H. Darcy, y actualmente se puede derivar a partir de la ecuación de Navier-Stokes por medio de una integración estadística. Las ecuaciones (1.17) y (1.18) son las ecuaciones que rigen el flujo en medios porosos.

1.3.1 Flujo gaseoso a través de un medio poroso

Dado que la compresibilidad de un gas es mayor por varios ordenes de magnitud que la de los medios porosos, la porosidad r y la permeabilidad k se pueden considerar constantes, de modo que la ecuación (1.17) resulta (habiendo reemplazado en ésta la ecuación (1.18))

$$r\partial_t\rho - \frac{k}{\mu}\vec{\nabla}\left(\rho\vec{\nabla}p\right) = 0 \quad (1.19)$$

(hemos supuesto que la viscosidad es constante). Se necesita ahora una relación entre la densidad y la presión, así que suponemos que el flujo gaseoso es politrópico

$$p = \frac{p_0\rho^n}{\rho_0^n} \quad (1.20)$$

donde $n \geq 1$. Finalmente, reemplazando la ecuación (1.20) en la (1.19) se obtiene la ecuación que rige el flujo de un gas en un medio poroso:

$$\partial_t \rho = \frac{np_0 k}{\rho_0^n r \mu} \vec{\nabla} \cdot (\rho^n \vec{\nabla} \rho) \quad (1.21)$$

El caso $n = 1$, que corresponde a flujos isotérmicos, es particularmente importante ya que la matriz sólida del medio poroso usualmente evita las variaciones de temperatura.

Definiendo

$$h \equiv \rho \left(\frac{np_0 k}{\rho_0^n r \mu} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.22)$$

reemplazando en (1.21) y tomando el caso unidimensional, obtenemos la ecuación (1.1), donde $m = n$. Así, la ecuación (1.1) describe el flujo politrópico de gases en medios porosos, si interpretamos a h como la densidad (multiplicada por el factor adecuado), m como el índice politrópico, y a $\eta = h^m$ como la presión del gas.

1.3.2 Flujo en acuíferos no confinados

Consideremos un fluido incompresible de densidad ρ y viscosidad μ en un medio poroso limitado inferiormente por una superficie plana horizontal e impermeable en $z = 0$, y por una superficie libre en $z = H \equiv H(x, t)$ en la cual la presión es constante (x es la coordenada horizontal, z la vertical, y se asume por simplicidad simetría plana). Siendo P la presión total, la ley de

Darcy dada en (1.18) se expresa como

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu}\vec{\nabla}(P + \rho gz) \quad (1.23)$$

Definiendo $C = k\rho g/\mu$ y $\tilde{h} = P/\rho g$

$$\vec{u} = -C\vec{\nabla}(\tilde{h} + z) \quad (1.24)$$

A \tilde{h} se la llama *cabeza hidráulica*, y notemos que C tiene unidades de velocidad. Dada la simetría asumida, el campo de velocidades se puede escribir como $\vec{u} = u\hat{x} + w\hat{z}$

$$u = -C\partial_x\tilde{h} \quad (1.25)$$

$$w = -C(\partial_z\tilde{h} + 1)$$

Supongamos además que la altura H es mucho menor que alguna longitud característica de la corriente, de modo que la componente w sea pequeña en comparación con u . Por otra parte, el coeficiente C introduce una escala característica de velocidad, de modo que u será del orden o menor que C , y entonces $w \ll C$. Esto último, junto con la segunda ecuación en (1.25) y la condición $\tilde{h} = 0$ en $z = H$ llevan a:

$$\tilde{h} = H - z \quad (1.26)$$

lo que, a partir de (1.25) lleva rápidamente a

$$u = -C\partial_x H \quad (1.27)$$

Por otra parte, la variación del volumen de fluido comprendido entre x y $x + \delta x$ en un intervalo de tiempo δt es

$$\delta V = \delta t \partial_t \int_x^{x+\delta x} r H dx = \delta t \delta x r \partial_t H \quad (1.28)$$

Dado que el fluido es incompresible y no hay fuentes ni sumideros, esta variación de volumen se debe a la diferencia del caudal $j = uH$ del fluido en x y en $x + \delta x$

$$\delta V = \delta t [j(x) - j(x + \delta x)] = \delta t \delta x \partial_x j = \delta t \delta x \partial_x (uH) \quad (1.29)$$

Estas dos últimas ecuaciones permiten establecer la ecuación de conservación de la masa de fluido como

$$r\partial_t H + \partial_x (uH) = 0 \quad (1.30)$$

Finalmente, reemplazando en (1.30) la expresión de u (1.27), se llega a la

ecuación que expresa la evolución del perfil H de una corriente en un acuífero no confinado

$$\partial_t H = \frac{C}{r} \partial_x (H \partial_x H) \quad (1.31)$$

Definiendo $h = CH/r$, y reemplazando en (1.31), se obtiene la ecuación de difusión no lineal (1.1), con $m = 1$.

1.4 Penetración de campos magnéticos en medios no lineales

Esta Sección será dedicada a estudiar la penetración de campos electromagnéticos en medios conductores que poseen propiedades magnéticas no lineales (para un análisis minucioso de este tema se recomienda ver Mayergoyz 1998). Este proceso de penetración se describe mediante las siguientes ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \quad (1.32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}(\vec{H})$$

donde \vec{H} y \vec{E} son los campos magnético y eléctrico, respectivamente, σ es la conductividad del medio, y $\vec{B}(\vec{H})$ indica la relación constitutiva entre la densidad de flujo magnético \vec{B} y el campo \vec{H} . En la primera de estas ecuaciones se despreció la corriente de desplazamiento pues suele ser pequeña en comparación con la corriente de conducción $\sigma \vec{E}$.

Las ecuaciones (1.32) se pueden reducir a una única ecuación para el campo magnético \vec{H} :

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H} \right) - \nabla^2 \vec{H} = -\sigma \partial_t \vec{B}(\vec{H}) \quad (1.33)$$

La expresión (1.33) es una ecuación vectorial no lineal en derivadas parciales, cuya solución se ve afectada (y complicada) por la particular geometría del medio, como así también por sus propiedades magnéticas no lineales. Para que el problema sea un poco más tratable, consideraremos la penetración normal de ondas planas en un medio semiinfinito que ocupa la región $x \geq 0$ (ver figura 1.4). Naturalmente, este problema es más sencillo que el problema general planteado por la ecuación (1.33), pero su importancia radica en que su sencillez geométrica permitirá revelar con mayor claridad los efectos de la no linealidad del comportamiento magnético del medio sobre la penetración del campo. En este caso, el campo magnético se puede representar en la siguiente forma

$$\vec{H}(x, t) = H_y(x, t) \hat{y} + H_z(x, t) \hat{z} \quad (1.34)$$

A partir de esta expresión es sencillo verificar que $\nabla^2 \vec{H} = \partial_x^2 \vec{H}$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$, por lo que la ecuación (1.33) se simplifica considerablemente y queda reducida a

$$\partial_x^2 \vec{H} = \sigma \partial_t \vec{B}(\vec{H}) \quad (1.35)$$

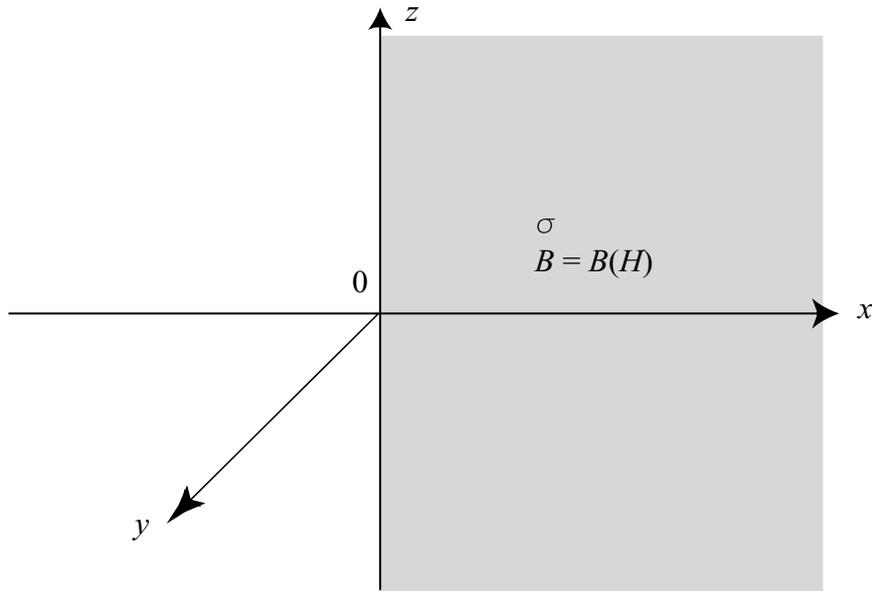


Figura 1.4: La zona gris es un medio semiinfinito ($x > 0$) con conductividad σ y propiedades magnéticas dada por la relación constitutiva $B = B(H)$.

Esta expresión es una ecuación vectorial de difusión no lineal. Si las propiedades magnéticas del medio fueran lineales de modo que $\vec{B} \propto \vec{H}$, no sólo se obtendría una gran simplificación de la ecuación (1.35), sino que además se desacoplarían las ecuaciones para cada componente del campo. Para retener esta ventaja, sin imponer que el medio sea lineal, supondremos que la onda plana está polarizada linealmente. Así, el campo magnético está confinado a variar en el tiempo sólo en una dirección que, sin pérdida de generalidad, se tomará como la dirección \hat{y} . Se aceptará también que la densidad de flujo magnético \vec{B} tiene la misma dirección que \vec{H}

$$\vec{H}(x, t) = H(x, t) \hat{y} \quad , \quad \vec{B} = B(H) \hat{y} \quad (1.36)$$

De este modo, la ecuación (1.35) resulta

$$\partial_x^2 H = \sigma \partial_t B(H) \quad (1.37)$$

En este punto, es necesario conocer la relación constitutiva $B = B(H)$ que establece las propiedades magnéticas del medio. Para la mayoría de los materiales ferromagnéticos, esta relación es como se muestra en la figura (1.5a). Con el objeto de dar un tratamiento analítico a este problema se adopta una aproximación a la figura (1.5a) dada por:

$$B = \begin{cases} -B_m & \text{si } -H_m \leq H \leq H_c \\ [k(H - H_c)]^{1/n} - B_m & \text{si } H_c \leq H \leq H_m \end{cases} \quad (1.38)$$

para la rama ascendente, y para la rama descendente

$$B = \begin{cases} B_m & \text{si } -H_c < H < H_m \\ -[k(-H - H_c)]^{1/n} + B_m & \text{si } -H_m < H < -H_c \end{cases} \quad (1.39)$$

donde el exponente n mide la brusquedad de la transición entre $-B_m$ y B_m , y su valor es usualmente mayor que 7 ($n \geq 7$). En la figura (1.5b) se puede apreciar esta idealización del comportamiento magnético. Introduciendo el campo magnético desplazado \tilde{H} y la densidad de flujo magnético desplazado \tilde{B} definidos por

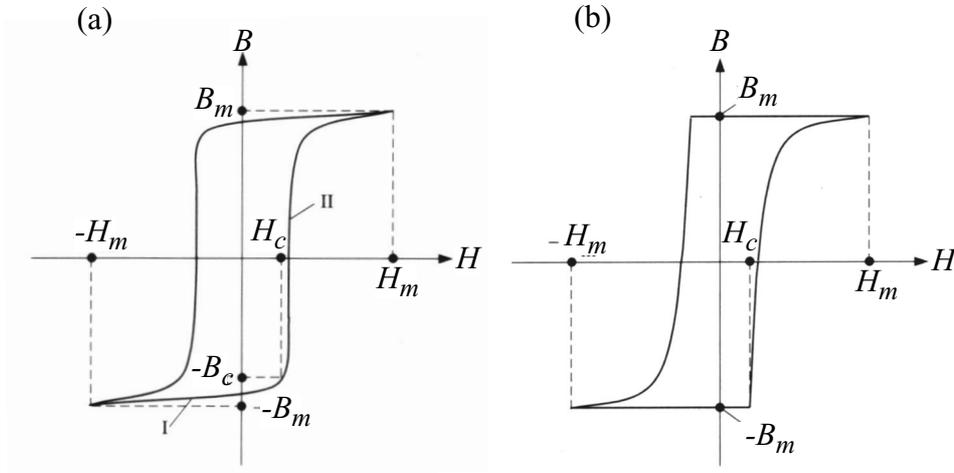


Figura 1.5: Relación constitutiva $B = B(H)$. (a) Para materiales ferromagnéticos. (b) Idealización del comportamiento graficado en (a).

$$\tilde{H} = H - H_c \tag{1.40}$$

$$\tilde{B} = B + B_m$$

la línea inferior de la ecuación (1.38) se escribe

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{B}^n}{k} \tag{1.41}$$

De este modo, si el medio conductor sigue el comportamiento magnético dado por (1.38), junto con (1.40) y (1.41), la ecuación (1.37) toma la forma

$$k\sigma\partial_t\tilde{B} = \partial_{xx}\tilde{B}^n \tag{1.42}$$

Definiendo $h \equiv (n/k\sigma)^{1/(n-1)} \tilde{B}$, reemplazando en (1.42) y luego de un poco de álgebra, obtenemos la ecuación (1.1), donde $m = n - 1$. Por lo tanto, la ecuación (1.1) describe la penetración de una onda electromagnética plana linealmente polarizada en un medio conductor con propiedades magnéticas dadas por la ecuación (1.41), si interpretamos a h como la densidad de flujo magnético (multiplicada por el factor adecuado), y si $m \geq 6$.

1.5 Conducción térmica radiativa

Si un fluido es calentado de modo no uniforme, o si se libera energía en su interior, habrá un flujo de energía por transporte conductivo de calor que tenderá a homogeneizar la temperatura. Pero a temperaturas suficientemente altas para que el medio emita energía por radiación (típicamente de decenas o centenas de miles de grados Kelvin), un nuevo mecanismo de transferencia de calor se torna preponderante: el de *conducción radiativa* del calor (esta situación se da, por ejemplo, en las primeras etapas de una explosión termonuclear). La diferencia esencial entre este proceso y el de conducción ordinaria de calor radica en que el coeficiente de conductividad térmica para la conducción radiativa depende fuertemente de la temperatura, y como consecuencia la ecuación de transporte del calor será no lineal. Aquí derivaremos esta ecuación, siguiendo los lineamientos de Zel'dovich y Raizer 1966.

El mecanismo de conducción radiativa puede transferir energía a una velocidad mucho mayor que la velocidad del sonido en el medio. Por lo tanto, si se libera energía en el seno de un fluido y su temperatura aumenta lo suficiente, esta energía será disipada rápidamente por conducción radiativa,

por lo que el fluido no tiene tiempo de ponerse en movimiento y la presión no se homogeneiza, entonces el calor fluye a través de un medio estacionario. En virtud de esto, aquí consideraremos el transporte de calor por conducción radiativa en un medio estacionario cuya densidad no cambia con el tiempo.

La ecuación del balance de energía toma la forma

$$\rho c_v \partial_t T = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (1.43)$$

donde ρ es la densidad, c_v es el calor específico a volumen constante, y \vec{S} es el vector flujo de calor.

Veamos como expresar \vec{S} . Sea un medio radiante infinito a temperatura constante que se halla en equilibrio. La intensidad de la radiación está dada por la fórmula de Planck. Los fotones que llegan a un dado punto del medio son emitidos en el mismo medio en la vecindad de dicho punto a una distancia no mayor que unos pocos caminos libres medios; fotones emitidos a una distancia mayor son absorbidos por el medio antes de llegar a tal punto. En consecuencia, sólo una vecindad inmediata del punto participa en el establecimiento de la intensidad de la radiación de equilibrio. Esto significa que si la temperatura del medio no es homogénea, pero cambia suficientemente poco con la posición de modo que para distancias del orden del camino libre medio los cambios son insignificantes, entonces la intensidad de la radiación en cada punto es la de equilibrio a la temperatura en ese punto (dada por la fórmula de Planck). A esta situación se la llama de equilibrio local. La misma condición para que el medio se halle en equilibrio local (pequeños gradientes de temperatura) permite proponer que el flujo de energía \vec{S} sea proporcional al gradiente de densidad de energía U

$$\vec{S} = -\frac{lc}{3}\vec{\nabla}U \quad \text{donde} \quad U = 4\sigma T^4 \quad (1.44)$$

donde T es la temperatura absoluta, c es la velocidad de la luz, σ es la constante de Stefan-Boltzmann, y l es el camino libre medio de los fotones (no de las moléculas del medio)². Escribiremos a \vec{S} de la siguiente forma

$$\vec{S} = -\kappa\vec{\nabla}T \quad \text{donde} \quad \kappa = \frac{16}{3}l\sigma T^3 \quad (1.45)$$

A κ se lo llama el coeficiente de conductividad térmica radiativa. Debemos destacar que κ depende explícitamente de la temperatura, pero también implícitamente a través de l . Considerando a c_v independiente de la temperatura, reemplazando (1.45) en (1.43), y dividiendo por ρc_v se obtiene

$$\partial_t T = \vec{\nabla} \cdot (\chi\vec{\nabla}T) \quad (1.46)$$

donde χ es el coeficiente de difusión térmica radiativa definido por

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_v} = \frac{16\sigma l}{3\rho c_v} T^3 \quad (1.47)$$

²La distancia que recorre un fotón desde que es emitido hasta que es absorbido por el medio depende de su frecuencia ν . Por lo tanto se puede definir el camino libre medio a una dada frecuencia l_ν . El camino libre medio l se define como el promedio en frecuencia de l_ν , y se lo conoce como camino libre medio de Rosseland.

En muchas situaciones es posible considerar a l como proporcional a la temperatura a alguna potencia

$$l = AT^\mu \quad \mu > 0 \quad (1.48)$$

En un gas totalmente ionizado $\mu = 7/2$, y en un gas múltiplemente ionizado es $\mu = 1.5 - 2.5$. Reemplazando (1.48) y (1.47) en (1.46) se llega a

$$\partial_t T = \frac{16\sigma A}{3\rho c_v} \vec{\nabla} \cdot (T^{\mu+3} \vec{\nabla} T) \quad (1.49)$$

Si ahora definimos $h \equiv (16\sigma A/3\rho c_v)^{1/\mu+2} T$, reemplazamos en la expresión anterior, y tomamos el caso unidimensional, obtenemos la ecuación de difusión no lineal (1.1) con $m = \mu + 3$. Por lo tanto, la ecuación (1.1) describe la difusión térmica radiativa, si interpretamos h como la temperatura (multiplicada por el factor adecuado), y si $m = \mu + 3$ ($m = 13/2$ para un gas totalmente ionizado, y $m = 4.5 - 5.5$ para un gas múltiplemente ionizado).

1.6 Generalizaciones de la ecuación de difusión no lineal

Sólo con la intención de dar al lector una visión un poco más amplia acerca del fenómeno de difusión no lineal, en esta Sección presentaremos algunas generalizaciones de la ecuación (1.1).

1.6.1 Generalización a $m < 0$

Quizás la más evidente generalización sea la misma ecuación (1.1), pero ahora tomando $m < 0$. Bajo esta circunstancia, cuando $h \rightarrow 0$ el lado derecho de (1.1) diverge, por lo que h difunde muy rápidamente. A este fenómeno se lo llama precisamente *difusión rápida*, e incluso existen soluciones que presentan el fenómeno de *difusión ultrarrápida*, en el cual todo el proceso se extingue en un lapso finito de tiempo. Debemos destacar el caso particular $m = -1$, para el que existen soluciones analíticas que ejemplifican los fenómenos recién comentados, además de poseer una peculiar propiedad de aditividad de sus soluciones. En este punto remitimos al lector al trabajo de Rosenau (1995).

1.6.2 Generalización a más dimensiones

Claramente la ecuación (1.1) es la versión en una dimensión de la ecuación

$$\partial_t h = \vec{\nabla} \cdot (h^m \vec{\nabla} h) \quad (1.50)$$

De acuerdo a la geometría particular del problema que se quiera resolver, en esta ecuación participarán de una a tres variables espaciales, y por ende podrá ser más complicada que la (1.1). Sin embargo, si el problema tiene una simetría tal que para describirlo es suficiente una única variable espacial x (cartesiana si la simetría es plana, radial si la simetría es axial o esférica), entonces la ecuación (1.50) se reduce a

$$\partial_t h = x^{-n} \partial_x (x^n h^m \partial_x h) \quad (1.51)$$

donde n vale 0 si la simetría es plana (este es el caso considerado en este trabajo), 1 si la simetría es axial, y 2 si la simetría es esférica (este caso puede no tener sentido en algunas de las aplicaciones, como por ejemplo, en el derrame viscogravitatorio de fluidos sobre una superficie plana horizontal). Buena parte del contenido del presente trabajo puede ser extendido, al menos cualitativamente, a los casos $n = 1$ y 2.

1.6.3 Derrame de fluidos no Newtonianos

Tal como ya fue explicado, la ecuación (1.1) con $m = 3$ describe el derrame de un fluido *Newtoniano* sobre una superficie plana horizontal bajo la acción de las fuerzas viscosa y gravitatoria. En Gratton et al. 1999, se estudia la generalización del problema anterior para el caso en que el fluido es *no* Newtoniano; en particular se asume que el fluido tiene una reología del tipo ley de potencia. En el citado trabajo se deriva la ecuación que gobierna al fenómeno, la cual resulta ser una generalización de la ecuación (1.1) con $m = 3$ que retiene sus características fundamentales, esto es, la existencia de soluciones con frentes que viajan a velocidad finita y el fenómeno del tiempo de espera.

1.6.4 Ecuación de difusión no lineal con un término de reacción

Como se puede apreciar en la segunda fila de la tabla 1.1, la ecuación (1.1) con $m > 1$ describe la dispersión de una población biológica. En verdad, este

fenómeno no está descrito por la ecuación (1.1), sino por una generalización de la misma (Gurtin y MacCamy 1977), a saber

$$\partial_t \rho = \partial_x (\rho^m \partial_x \rho) + \mu \rho \quad (1.52)$$

donde μ es una constante, y la variable $\rho(x, t)$ representa la concentración de la especie, es decir, la cantidad de individuos de la especie por unidad de volumen. En esta ecuación la novedad está dada por el término $\mu \rho$, que representa la variación de ρ debida al nacimiento o muerte de individuos de la población. Si $\mu > 0$ la población total aumenta, y disminuye si $\mu < 0$. Sin embargo, si introducimos las variables

$$\rho = h e^{\mu t} \quad (1.53)$$

$$\tau = \frac{1}{m\mu} (e^{\mu t} - 1)$$

la ecuación (1.52) se transforma en

$$\partial_\tau h = \partial_x (h^m \partial_x h) \quad (1.54)$$

Por lo tanto, gracias a la transformación (1.53), la ecuación (1.52) es equivalente a la ecuación (1.1).

Si en la (1.52) se admite ahora que $\mu \equiv \mu(t)$ es una función del tiempo, definiendo

$$\rho = h \exp \left[\int_0^t \mu(t') dt' \right]$$

$$\tau = \int_0^t f(t') dt' \quad (1.55)$$

$$f(t) = \exp \left[m \int_0^t \mu(t') dt' \right]$$

se llega nuevamente a la ecuación (1.54).

1.6.5 Ecuación de Fokker-Planck no lineal

Cuando una partícula está sujeta a la acción de una fuerza externa $F(x)$ y de alguna perturbación aleatoria (ruido), la probabilidad $p = p(x, t)$ de hallar a la partícula entre x y $x + dx$ en el instante t está determinada por la ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t p = -\partial_x [F(x)p] + D\partial_{xx}p \quad (1.56)$$

donde D es el coeficiente de difusión. Esta ecuación combina los efectos de deriva y de difusión de la probabilidad debidos a la fuerza y al ruido respectivamente. Esta ecuación fue generalizada (Plastino y Plastino 1995) de modo que el término difusivo sea no lineal

$$\partial_t p = -\partial_x [F(x)p] + \partial_x (p^m \partial_x p) \quad (1.57)$$

($D = 1$ por simplicidad). Una fundamentación de esta ecuación se halla

en Borland 1998. Claramente, la ecuación (1.57) es una generalización de (1.1). El origen de la no linealidad puede ser diverso: interacción entre las partículas que difunden, o interacción de las partículas que difunden con el medio.

En el caso particular $F(x) = -kx$ (k constante positiva), la ecuación (1.57) puede ser transformada en (1.1) por medio de los siguientes cambios de variable:

$$p = he^{(m+2)kt}$$

$$\tau = \frac{1}{(m+2)k} (e^{(m+2)kt} - 1) \quad (1.58)$$

$$y = xe^{(m+2)kt}$$

Capítulo 2

Teoría

En este Capítulo haremos una reseña de algunos resultados teóricos conocidos, que resultan relevantes a los fines de este trabajo. En primer lugar, en la Sección 2.1 mostraremos algunas soluciones analíticas que son ilustrativas acerca de las propiedades características de las soluciones de la ecuación (1.1), y que son indispensables para el establecimiento de cotas. En la Sección 2.2 se dan las condiciones que debe verificar el perfil inicial para que la solución tenga un tiempo de espera, y para que el frente arranque con velocidad no nula. Se dan también cotas teóricas sobre el tiempo de espera y la velocidad de arranque. En la Sección 2.3 se explica cómo obtener las soluciones autosemejantes de (1.1), y cuáles de éstas pueden describir el régimen asintótico de la solución de nuestro problema en un dominio cercano al frente y hacia el fin de la etapa de espera. Finalmente, en la Sección 2.4 se muestran cómo se comportan las soluciones de (1.1) frente a un cambio de escala.

2.1 Algunas soluciones analíticas de interés

Resulta conveniente introducir algunas soluciones analíticas autosemejantes de la ecuación (1.1) que son de interés para nuestros propósitos, a saber: *la solución fundamental*, *la onda viajera*, y *la solución singular*.

2.1.1 La solución fundamental

Esta solución describe la evolución de una cantidad Q de h depositada a $t = 0$ en $x = 0$ (Zel'dovich y Kompaneets 1950; Barenblatt 1952; Pattle 1959). La solución fundamental está dada por:

$$f(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{m+2}} \left(1 - \frac{x^2}{x_f^2}\right)^{\frac{1}{m}}, & |x| \leq x_f \\ 0 & |x| > x_f \end{cases} \quad (2.1)$$

con

$$x_f = x_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{m+2}} \quad t_0 = \frac{x_0^2 m}{2m+4} \quad x_0 = Q \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (2.2)$$

Más precisamente, esta es la solución que se obtiene cuando el perfil inicial es $h(x, t = 0) = Q \delta(x)$. Observemos que nuestra condición inicial (1.5) coincide con este perfil inicial en el límite $\alpha \rightarrow \infty$.

La solución fundamental presenta un aspecto típico de las soluciones de (1.1): la presencia de frentes que viajan con velocidad finita. Es instructivo comparar este comportamiento con el que tiene la solución de la ecuación de

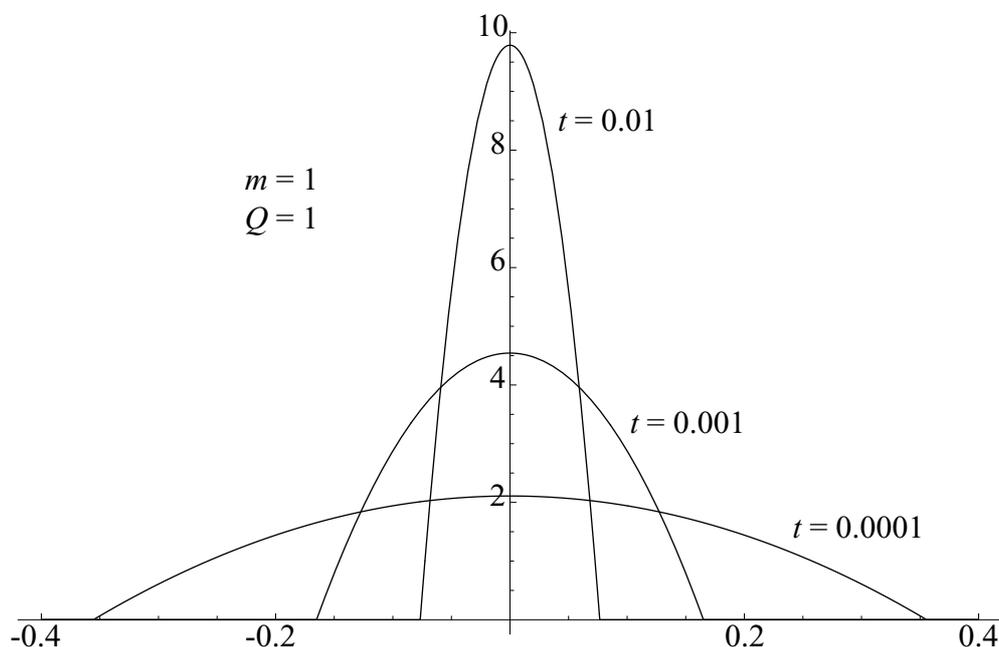


Figura 2.1: Solución fundamental (2.1) para $m = 1$ y $Q = 1$.

difusión *lineal* (que corresponde a $m = 0$) con la misma condición inicial. Esta solución es diferente de cero para todo $x \in (-\infty, \infty)$ y para todo $t > 0$. Dado que en $t = 0$ todo se hallaba concentrado en $x = 0$, entonces la velocidad de propagación del frente en este caso es infinita.

En las figuras 2.1 y 2.2 se muestra la solución fundamental (2.1) para $m = 1$ y $m = 3$ respectivamente, ambas con el mismo perfil inicial y a tres instantes de tiempo.

Comparando con la difusión anómala, donde la raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio crece como $t^{\theta/2}$, se puede apreciar que $m > 0$ corresponde a $\theta < 1$ (subdifusión) (Compte y Jou 1996). Una generalización de esta solución ha sido obtenida por Malacarne et al. (2001) para una

ecuación de difusión no lineal en la cual el coeficiente de difusión depende de una potencia de x .

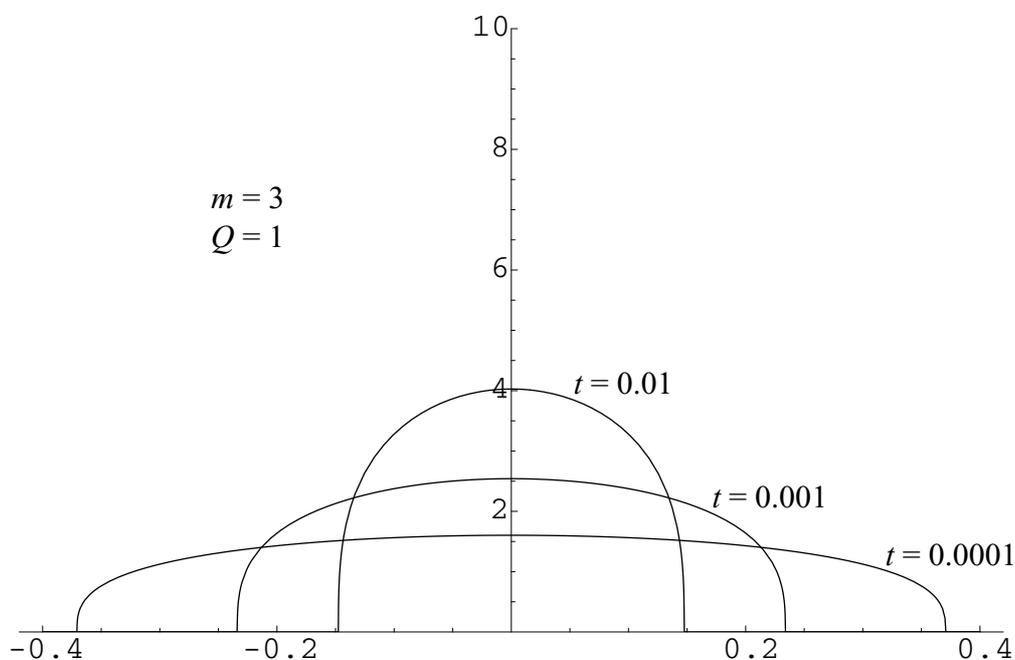


Figura 2.2: Solución fundamental (2.1) para $m = 3$ y $Q = 1$.

2.1.2 La onda viajera

Esta solución es tal que depende de x y t sólo a través de la variable z definida como $z = x + ct$, con $c = \text{cte}$. En este caso, la ecuación (1.1) puede integrarse una vez y se obtiene

$$ch + K = h^m \frac{dh}{dz} \quad (2.3)$$

En el caso particular $K = 0$ esta expresión es fácilmente integrada y se ob-

tiene (Aronson et al. 1983; Gratton y Minotti 1990)):

$$w(x, t) = \begin{cases} [cm(x + ct)]^{\frac{1}{m}} & , \quad x \geq x_f = -ct \\ 0 & , \quad x < x_f \end{cases} ; \quad c = \text{const.} \quad (2.4)$$

que describe un perfil que viaja a velocidad constante c en la dirección decreciente de x sin modificar su forma. A partir de la definición de u dada por la ecuación (1.3), es fácil verificar que para la solución w resulta $u = -c$, si $x \geq x_f$, y $u = 0$, si $x < x_f$. En las figuras 2.3 y 2.4 se grafica esta solución con $m = 1$ y $m = 3$ respectivamente.

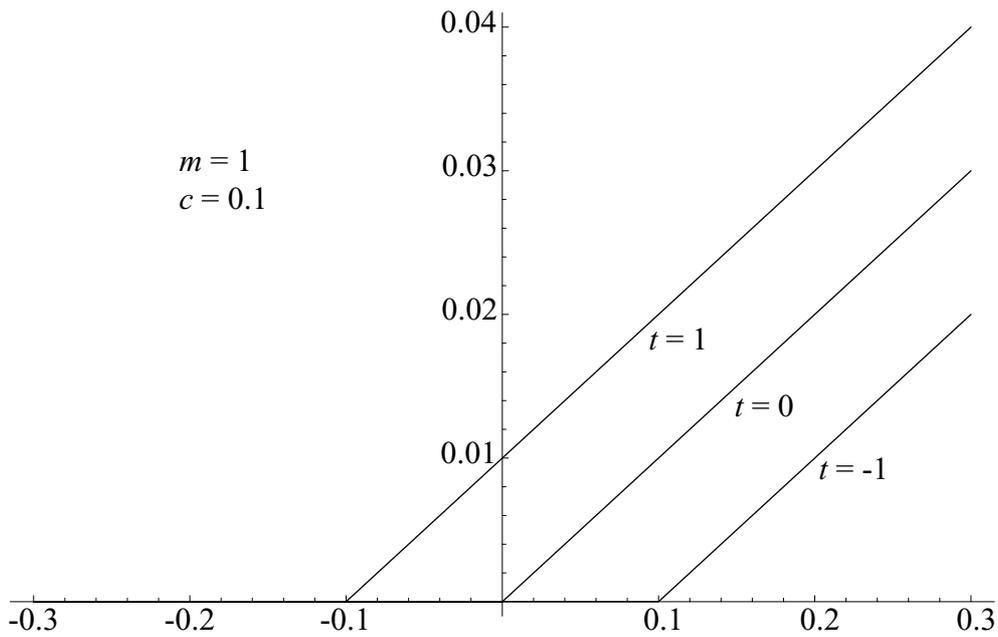


Figura 2.3: Onda viajera dada por (2.4) para $m = 1$ y $c = 0.1$.

Gracias a la relevancia que tiene en esta tesis, en adelante nos referimos a la solución (2.4) como *la onda viajera*, a pesar que existen otras soluciones de

la ecuación (1.1) que responden a esta denominación, las que presentaremos a continuación.

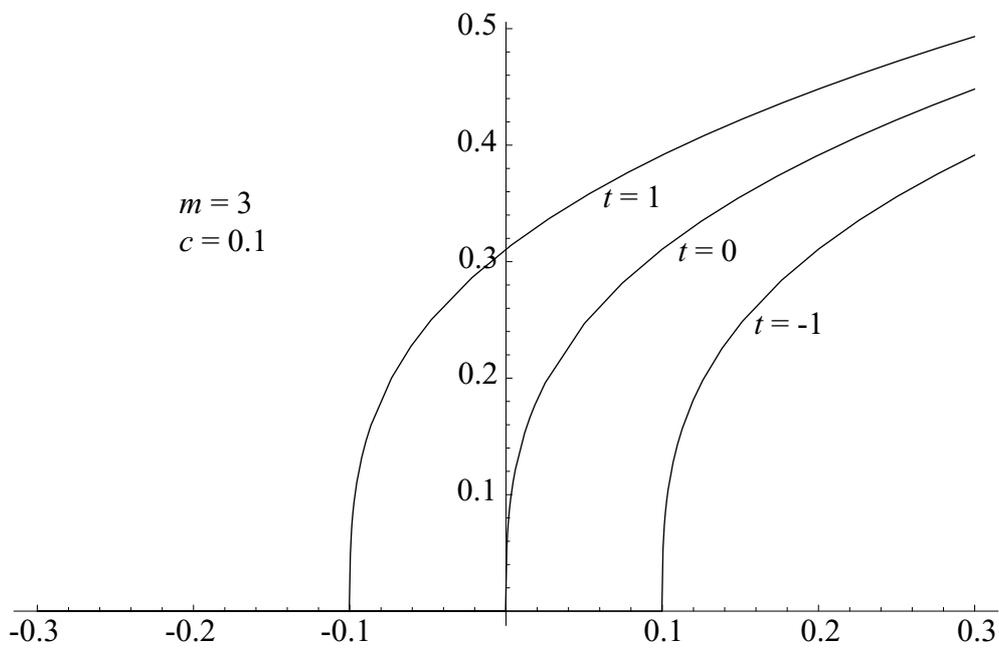


Figura 2.4: Onda viajera dada por (2.4) para $m = 3$ y $c = 0.1$.

Otras soluciones del tipo onda viajera

A partir de (2.3) se pueden hallar otras soluciones analíticas en el caso $K \neq 0$.

Consideremos primero $K > 0$. Definiendo

$$K = -ch_0, \quad h = H(\phi)h_0, \quad \phi = cz/h_0^m \tag{2.5}$$

la ecuación (2.3) se transforma en

$$\frac{d\phi}{dH} = \frac{H^m}{H-1} \quad (2.6)$$

Esta ecuación se puede integrar y se obtiene

$$\phi(H) = c_1 - \frac{H^{1+m}}{1+m} {}_2F_1(1+m, 1, 2+m, H) \quad (2.7)$$

donde c_1 es constante y ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica. Las características de esta solución cambian si $H > 1$ o $H < 1$, lo que a su vez depende del valor que se haya asignado a c_1 . Como ejemplo, en la figura 2.5a graficamos la solución (2.7) habiendo elegido c_1 de modo que $\phi(H=2) = 0$ (por lo tanto será $H > 1$), y en la figura 2.5b de modo que $\phi(H=0) = 0$ (en este caso será $H < 1$).

Consideremos ahora el caso $K < 0$. Si en (2.5) mantenemos la tercera y la segunda definición, y la primera la sustituimos por $K = ch_0$, se obtiene

$$\frac{d\phi}{dH} = \frac{H^m}{H+1} \quad (2.8)$$

cuya solución está dada por

$$\phi(H) = c_1 + \frac{H^{1+m}}{1+m} {}_2F_1(1+m, 1, 2+m, -H) \quad (2.9)$$

En la figura 2.6 graficamos la solución (2.9) habiendo elegido c_1 de modo que $\phi(H=0) = 0$.

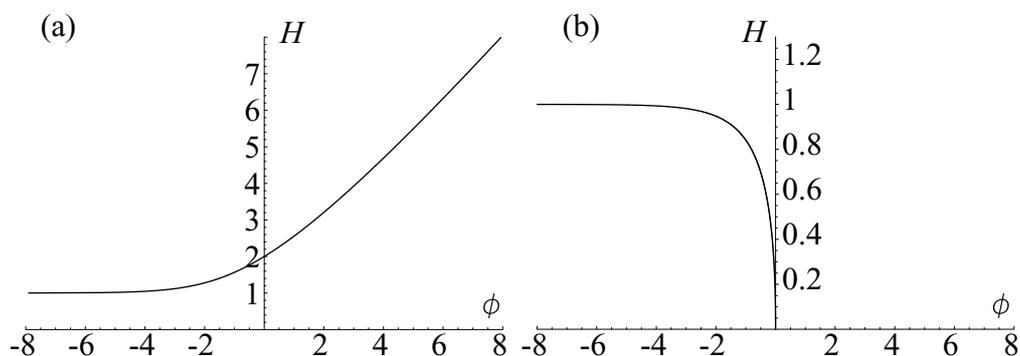


Figura 2.5: Ondas viajeras dadas por (2.7) para $m = 1$. En (a) es $\phi(H = 2) = 0$, y en (b) es $\phi(H = 0) = 0$.

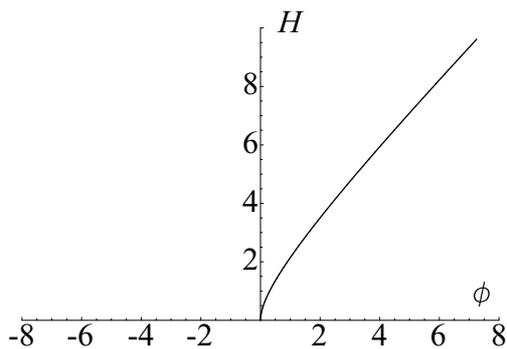


Figura 2.6: Onda viajera dada por (2.9) para $m = 1$, con $\phi(H = 0) = 0$.

Las nuevas soluciones dadas por (2.7) y (2.9) son la generalización de aquellas obtenidas por Gratton y Minotti (1990) para $m = 3$.

En el caso particular que m sea un número natural, las expresiones (2.7) y (2.9) pueden escribirse respectivamente de la siguiente forma

$$\phi(H) = c_1 + \ln(H - 1) + \sum_{n=1}^m \frac{H^n}{n} \quad (2.10)$$

$$\phi(H) = c_1 + (-1)^m \ln(H + 1) + \sum_{n=1}^m (-1)^{n+m} \frac{H^n}{n}$$

2.1.3 La solución singular

Finalmente, mencionaremos una solución analítica de (1.1), a la que llamaremos *solución singular*, que posee algunos de los aspectos del comportamiento de tiempo de espera (Barenblatt 1952). Esta solución es:

$$b(x, t) = \begin{cases} S \left(\frac{m+2}{m}\right) \left(\frac{t_S x^2}{t_S - t}\right)^{\frac{1}{m}} & (x \geq 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (t < t_S = S^{-m} t_1) \quad (2.11)$$

donde S es una constante positiva y

$$t_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2}\right)^{m+1} \quad (2.12)$$

Claramente $b(x, t)$ es la solución de (1.1) que corresponde a la condición inicial

$$g_b = \begin{cases} S \left(\frac{m+2}{m}\right) x^{\frac{2}{m}} & (x \geq 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2.13)$$

Notemos que para $t < t_S$ esta solución tiene un frente que espera en $x = 0$. La solución explota a $t = t_S$ de modo que no puede ser extendida a $t > t_S$.

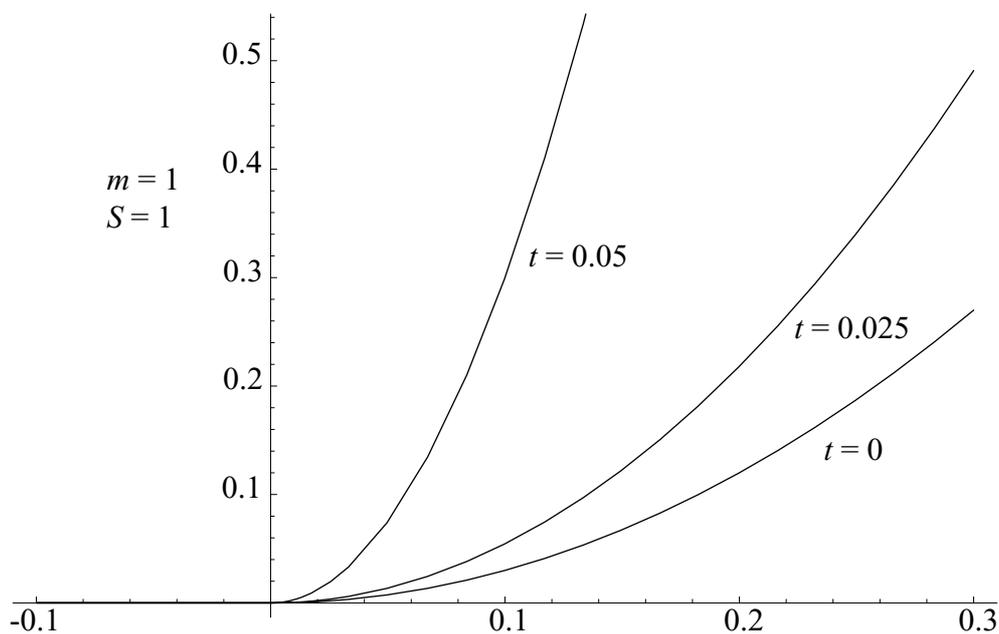


Figura 2.7: Solución singular dada por (2.11) con $m = 1$ y $S = 1$.

Obsérvese que t_S depende sólo de m ; en particular *no depende* del tamaño de el soporte de g_b (Aronson et al. 1983).

En las figuras 2.7 y 2.8 mostramos la solución singular con $m = 1$ y $m = 3$ respectivamente.

2.2 El tiempo de espera y la velocidad de arranque

A continuación presentaremos algunos resultados teóricos que nos indican bajo que condiciones puede haber un tiempo de espera no nulo, y que establecen cotas para su valor. En relación al comportamiento del frente veremos cuáles

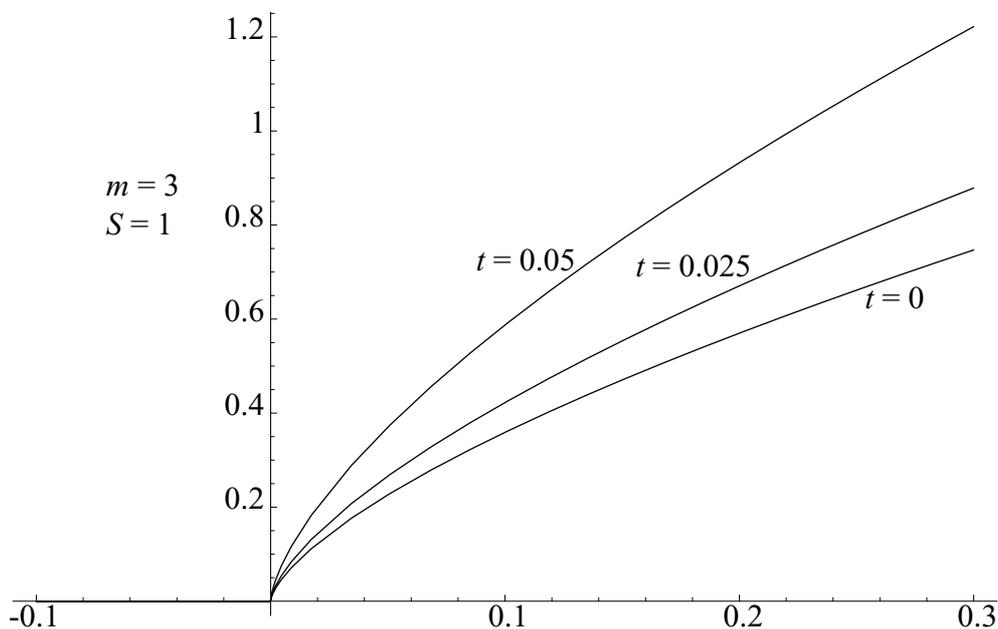


Figura 2.8: Solución singular dada por (2.11) con $m = 3$ y $S = 1$.

son los requisitos para que su velocidad al momento del arranque sea no nula, y se dará una cota inferior para ésta.

2.2.1 Condiciones para la existencia de un tiempo de espera

Cuando $0 < m \ll 1$ el término de propagación no lineal $(\partial_x \eta)^2$ domina y, como una primera aproximación, se puede despreciar el término difusivo $m\eta \partial_{xx}^2 \eta$ de la (1.4) reduciendo a esta ecuación a una de primer orden que puede ser resuelta por el método de las características; en una segunda aproximación el término de difusión se puede tratar como una perturbación. De este modo se puede demostrar (Kath y Cohen 1982) que, para condiciones iniciales del tipo $g \propto x^{\alpha g}$, resulta:

- si $\alpha < 1$ el frente se mueve inmediatamente,
- si $\alpha = 1$ hay un t_w no nulo y el frente se pone en movimiento cuando un *corner shock* (una discontinuidad η_x) aparece en el frente,
- si $\alpha > 1$ hay un $t_w > 0$, y durante el período de espera se desarrolla un *corner layer* que se desplaza hacia el frente; el arranque ocurre cuando el frente es alcanzado por el *corner layer*.

Posteriormente, Vázquez (1984) demostró que estos resultados valen para todo m . Luego las condiciones iniciales (1.5) llevarán a $t_w > 0$ sólo cuando $\alpha > 1$.

2.2.2 Cotas para el tiempo de espera

Existe una distinción entre aquellos tiempos de espera cuyo valor depende del comportamiento *local* de $g(x)$ cerca de $x = x_f$, y aquellos en los que depende del comportamiento global de $g(x)$. Ha sido demostrado por Aronson et al. (1983) que:

- (a) si en un entorno de $x = x_f$ se tiene que

$$g(x) \propto |x - x_f|^{\alpha q} \quad (\alpha > 1) \quad (2.14)$$

el tiempo de espera depende de los datos globales y en este caso se forma un *corner layer* a una distancia *finita* del frente que espera y es su movimiento el que determina t_w (este es el caso para nuestras condiciones iniciales (1.5)).

(b) si cerca de $x = x_f$ se tiene

$$g(x) = A |x - x_f|^q \quad (A = cte.) \quad (2.15)$$

pueden surgir dos casos:

(b1) si para todo x se satisface la condición

$$g(x) \leq B |x - x_f|^q \quad (B > A) \quad (2.16)$$

el tiempo de espera depende de los datos globales y (como en el caso (a)) se desarrolla un corner layer a distancia *finita* del frente que espera; en este caso valen las siguientes cotas para el tiempo de espera

$$\frac{m}{2(m+2)B^m} = t_B \leq t_w \leq t_A = \frac{m}{2(m+2)A^m} \quad (2.17)$$

(b2) si en todas partes se verifica la condición

$$g(x) \leq A |x - x_f|^q \quad (B = A) \quad (2.18)$$

el tiempo de espera depende de los datos locales y está dado por $t_w = t_A$.

En resumen, el tiempo de espera depende de los datos locales sólo cuando

$$\begin{aligned}
 g(x) &= A|x - x_f|^q && \text{cerca de } x = x_f \\
 & && \text{y} \\
 g(x) &\leq A|x - x_f|^q && \text{para todo } x
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

En cualquier otro caso, t_w depende de los datos globales. La aparición de un corner layer durante el período de espera a una distancia finita del frente es el aspecto característico que indica que t_w depende de los datos globales (Lacey 1983).

Una cota superior útil de t_w (pero no su valor exacto) se puede obtener por medio del *Principio de Comparación Desplazada*¹ de Vázquez (1983), que en el caso que estamos considerando se expresa del modo siguiente: si para todo $x \in (-\infty, x_0]$ se cumple que

$$M_1(x, 0) = \int_{-\infty}^x g_1(x)dx \leq \int_{-\infty}^x g_2(x)dx = M_2(x, 0)
 \tag{2.20}$$

entonces para todo $t > -t_w$ se cumple que

$$M_1(x, t) = \int_{-\infty}^x h_1(x, t)dx \leq \int_{-\infty}^x h_2(x, t)dx = M_2(x, t)
 \tag{2.21}$$

es decir, si la “masa” de h_1 se halla inicialmente desplazada hacia la derecha con respecto a la de h_2 (ver figura 2.9), esta situación se mantiene para

¹Traducimos así la denominación “Shifting Comparison Principle” empleada por Vázquez

todo tiempo posterior. Como una aplicación de este principio, supongamos que $g_{1,2}(x \leq 0) = 0$ y que h_2 es una solución con tiempo de espera; luego, tomando $x = 0$ en (2.21) se puede ver que h_1 es también una solución con tiempo de espera, con $t_{w1} \geq t_{w2}$. Este resultado nos será útil más adelante.

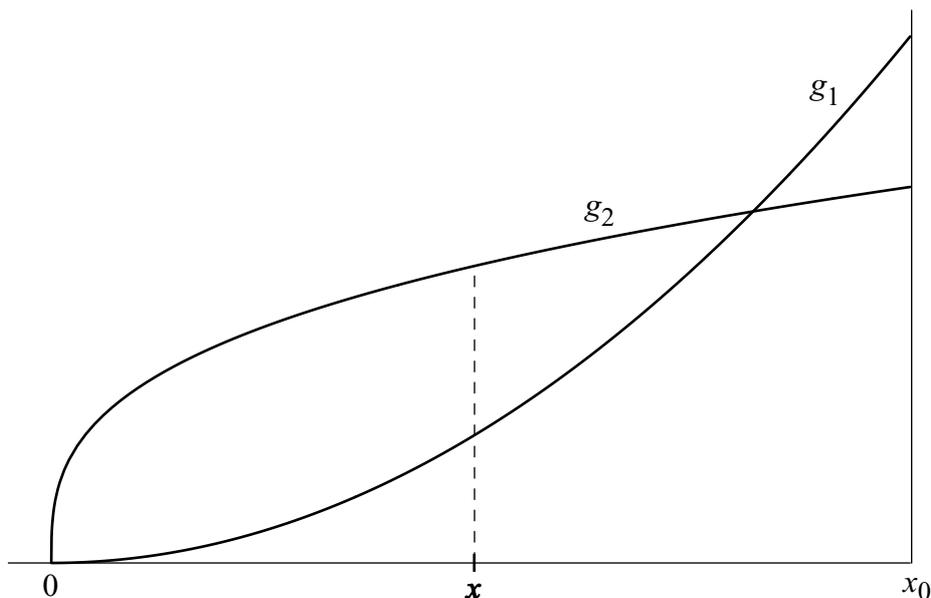


Figura 2.9: Los perfiles iniciales g_1 y g_2 verifican la condición (2.20), esto quiere decir que la “masa” de g_1 que se encuentra a la izquierda de x es menor que la de g_2 , para cualquier x . El Teorema de Comparación Desplazada asegura que esta propiedad se verifica para todo tiempo posterior. Si tomamos $x = 0$, esto implica que el frente de g_1 no puede arrancar antes que el de g_2 , entonces debe ser $t_{w2} \leq t_{w1}$.

Una importante cota superior del tiempo de espera debida a Vázquez (1983) se puede obtener considerando una solución con tiempo de espera h_2 con $M_2(x_0, 0) = 1$ cuyo tiempo de espera es t_{w2} . Ahora tomamos $g_1 = 2\delta(x - 1)$ que es una condición inicial para la que la ecuación (1.1) tiene

una solución analítica conocida (la solución fundamental, ver Sección 2.1.1), según la cual $M_1(0, t) = 0$ para $t \leq t_\infty$ dado por:

$$t_\infty(m) = \frac{m}{(2m+4)} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right)} \right]^m \quad (2.22)$$

Por lo tanto, de acuerdo al Principio de Comparación Desplazada

$$t_{w2} \leq t_\infty \quad (2.23)$$

que es la cota superior buscada. Si $M_2(x_0, 0) = M$ debemos tomar $g_1 = 2M\delta(x-1)$, y correspondientemente la cota será t_∞/M .

En resumen, excepto para el caso especial (b2), no hay fórmulas analíticas para t_w , y sólo disponemos de las cotas dadas por las ecuaciones (2.17) y (2.22). Sin embargo, para nuestras condiciones iniciales (1.5), en algunos casos tales cotas no nos brindan buenos estimadores de t_w .

2.2.3 Velocidad de arranque del frente

Si el soporte de $g(x)$ es compacto, Aronson et al. (1983) y Aronson et al. (1985) demostraron que cuando el movimiento inicial del frente depende de datos locales (caso (b2)), la velocidad del frente es una función continua de t , de modo que la velocidad al arranque \hat{c} es nula; por otra parte, si el movimiento inicial del frente depende de los datos globales (como sucede para las condiciones iniciales (1.5)) \dot{x}_f es discontinua en el arranque y se cumple

que

$$\hat{c} \geq \frac{x_0}{t_0} \hat{c}_1(m), \quad \hat{c}_1(m) \equiv \frac{1}{9 (m+1)^2} \quad (2.24)$$

La condición (2.24) sólo pone una cota inferior a \hat{c} de modo que su valor exacto se debe determinar numéricamente.

2.3 Soluciones autosemejantes

Cuando las condiciones iniciales y de contorno involucran a lo sumo un único parámetro dimensional constante b , con dimensiones independientes $[b] = [x]/[t]^\delta$, la ecuación (1.1) admite soluciones autosemejantes que dependen de la variable adimensional

$$\zeta = \begin{cases} x/bt^\delta & \text{si } t > 0 \\ -x/b(-t)^\delta & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Varios ejemplos de soluciones autosemejantes de (1.1) se pueden encontrar en la literatura (Barenblatt 1952; Barenblatt y Zel'dovich 1957; Pattle 1959; Pert 1977; Gilding y Peletier 1977a; Gilding y Peletier 1977b; Grundy 1979; Huppert 1982; Gratton y Minotti 1990) a la que remitimos al lector interesado.

El problema de valores iniciales (1.1), (1.5) involucra las escalas características x_0 , h_0 y t_0 , de modo que nuestras soluciones *no* serán autosemejantes. Sin embargo, cerca del frente y próximo al momento del arranque

(i.e. para $|x| \ll x_0$, $h \ll h_0$, $|t| \ll t_0$) estas escalas no pueden ser relevantes y las soluciones pueden ser autosemejantes en este dominio restringido. En este caso no hay parámetro dimensional relevante, por lo tanto el autovalor δ no se conoce de antemano, y la asintótica autosemejante (si es que existe) es de Segunda Especie (más adelante daremos un ejemplo de solución autosemejante de cada especie para mostrar cabalmente sus diferencias). En el presente caso, veremos que tales soluciones autosemejantes existen para cualquier δ , por lo tanto el espectro de autovalores es continuo y no podemos *a priori* conocer qué particular valor de δ será seleccionado para valores de m y α dados. En conexión con esto, ha sido conjeturado (pero no probado) que cuando el espectro de δ es continuo, son las condiciones iniciales las que determinan qué valor de δ será seleccionado (Barenblatt y Zel'dovich 1972).

2.3.1 Formalismo del plano de fases

Las soluciones autosemejantes de la ecuación (1.1) se pueden describir convenientemente en términos de las variables Z y V definidas por

$$Z(\zeta) = h^m t / x^2 \quad (2.26)$$

$$V(\zeta) = ut/x \quad (2.27)$$

donde u está definida por (1.3). Reemplazando las definiciones de ζ , Z y V en las ecuaciones (1.2) y (1.3) se obtiene:

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{Z(2\delta - 1) + mVZ - mV(V - \delta)}{mZ(2Z + mV)} \quad (2.28)$$

$$\frac{d \ln |\zeta|}{dZ} = -\frac{1}{(2Z + mV)} \quad (2.29)$$

Observese que la ecuación (2.28) es autónoma, por lo tanto si se tiene una solución $V = V(Z)$, la ecuación (2.29) permite hallar $Z = Z(\zeta)$ por simple cuadratura y de aquí se obtiene $h = h(x, t)$. De este modo, la totalidad de las soluciones autosemejantes se representan por medio de trayectorias (llamadas curvas integrales) en el plano de fases (Z, V) . Nótese que de acuerdo a la definición de Z dada por la ecuación (2.26), el semiplano $Z < 0$ en el plano de fases corresponde a $t < 0$, y $Z > 0$ a $t > 0$.

Dado que no existe una solución analítica general de (2.28), para lograr un conocimiento de las propiedades del plano de fases se debe estudiar el comportamiento de las curvas integrales en el entorno de los puntos singulares de la ecuación (2.28). Existen seis puntos singulares, que describiremos brevemente a continuación. Citamos sin demostración las propiedades de dichos puntos para todo m , ya que el lector las puede encontrar analizadas en detalle en Gratton y Minotti 1990 en el caso $m = 3$.

1. El punto $\mathcal{O} = (0, 0)$ corresponde a $\zeta = \infty$ y $x = \infty$ (excepto en el caso especial $\delta = 0$), por lo tanto representa un punto en el perfil de h infinitamente alejado del origen. Para $Z > 0$ este punto es un nodo: a medida que se aproxima a \mathcal{O} , todas las curvas integrales (excepto la curva $Z = 0$ que es irrelevante pues corresponde a $h \equiv 0$) convergen a una única curva dada por

$$V = \left(\frac{1 - 2\delta}{m\delta} \right) Z \left[1 + \frac{1 - 2\delta + m - m\delta}{m\delta^2} Z + \dots \right] \quad (2.30)$$

Para $Z < 0$ es una silla y sólo la curva (2.30) llega a \mathcal{O} . En ambos casos, las curvas que alcanzan al punto \mathcal{O} verifican las siguientes fórmulas asintóticas

$$\begin{aligned} Z &= k\zeta^{-1/\delta} \\ h &= k^{1/m} b^{1/\delta m} x^{(2\delta-1)/\delta m} \\ u &= -\frac{2\delta-1}{\delta m} k b^{1/\delta} x^{(\delta-1)/\delta} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Notemos que h y u no dependen de t cuando $x \rightarrow \infty$.

2. El punto $\mathcal{A} = (0, \delta)$ es una silla, y dos curvas integrales pasan por este punto, una es la ya mencionada $Z = 0$, y la otra está dada por

$$V = \delta + \frac{2\delta - 1 + m\delta}{m\delta(m + 1)} Z + \dots \quad (2.32)$$

El punto \mathcal{A} representa un frente móvil. Recordando que x_f indica la coordenada del frente, definiendo la constante ζ_f tal que $x_f = \zeta_f b t^\delta$, e introduciendo la notación $\xi = \zeta/\zeta_f = x/x_f$, cerca de x_f resulta $Z = m\delta(1 - \xi)$, y las variables físicas toman la forma

$$\begin{aligned}
 h &= [m\delta b^2 \zeta_f^2 t^{2\delta-1} (1-\xi)]^{1/m} \\
 u &= \delta x_f t^{-1} \xi \left[1 + \frac{2\delta-1+m\delta}{(m+1)\delta} (1-\xi) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.33}$$

3. El punto $\mathcal{B} = (-m/(4+2m), 1/(2+m))$ está estrechamente relacionado con las soluciones con tiempo de espera. El comportamiento asintótico de h y u cerca del punto \mathcal{B} está dado por

$$\begin{aligned}
 h &= \left(-\frac{m}{4+2m} \frac{x^2}{t} \right)^{1/m} \\
 u &= \frac{1}{2+m} \frac{x}{t}
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

La naturaleza de este punto singular depende del valor de δ . Si se definen

$$\delta_0 = \frac{4+3m}{4+2m} \quad \text{y} \quad \delta_{\pm} = \delta_0 \pm \left(\frac{2m}{2+m} \right)^{1/2}
 \tag{2.35}$$

entonces el punto \mathcal{B} representa $\zeta = \infty$ si $\delta < \delta_0$, y $\zeta = 0$ si $\delta > \delta_0$. Notemos que $\delta_0 > 1$ dado que $m > 0$. Ahora se debe distinguir entre varias posibilidades.

- (a) Si $\delta \leq \delta_-$ entonces \mathcal{B} es un nodo.
- (b) Si $\delta_- < \delta < 1$, \mathcal{B} es un foco: a medida que $\zeta \rightarrow \infty$ las curvas integrales arriban a \mathcal{B} enrollándose en sentido antihorario alrededor de él en forma de espiral.

- (c) Si $1 < \delta < \delta_0$, \mathcal{B} también es un foco como en el caso anterior, pero a su alrededor hay un ciclo límite. Todas las curvas integrales que llegan a \mathcal{B} a medida que $\zeta \rightarrow \infty$, así como la curva dada en (2.30) que llega a \mathcal{O} (este punto al igual que \mathcal{B} representan $\zeta = \infty$) emanan de dicho ciclo límite, que representa un frente que espera en $\zeta = 0$. A medida que $\delta \rightarrow 1$, el ciclo límite tiende a la figura formada por el segmento del eje Z que une los puntos \mathcal{O} y \mathcal{A} y la curva $Z = mV(V-1)$. Esta última es la curva integral que representa en el plano de fases a la solución de onda viajera (2.4). A medida que $\delta \rightarrow \delta_0$ el ciclo límite se cierra sobre el punto \mathcal{B} . Como veremos más adelante, este ciclo límite reviste mucha importancia para este trabajo.
- (d) Si $\delta_0 < \delta < \delta_+$, \mathcal{B} es un foco, pero ahora las curvas integrales llegan a \mathcal{B} ($\zeta = 0$) formando espirales que se enrollan en sentido horario.
- (e) Si $\delta_+ \leq \delta$, \mathcal{B} es un nodo.
4. El punto $\mathcal{C} = (0, \infty)$ es un nodo. Cerca de \mathcal{C} las curvas integrales tienen la forma $V = cte \cdot Z^{-1/m}$. Este punto representa un punto a una distancia finita $x_f = \zeta_f b t^\delta$ (ζ_f constante). A medida que una curva integral se acerca a este punto, $h \rightarrow 0$ y $u \rightarrow \infty$, pero el caudal hu es finito.
5. El punto $\mathcal{D} = (\infty, (1 - 2\delta)/(m(m+1)))$ es una silla. En el entorno de este punto las curvas integrales están dadas por

$$Z^{-3/2} \left\{ Z \left(V - \frac{1 - 2\delta}{m(m+1)} \right) - \frac{(2\delta - 1)[(2+m)\delta - 1]}{3m^2} \right\} = K \quad (2.36)$$

La curva con $K = 0$ es la única que llega a \mathcal{D} , y a lo largo de esta, dicho punto representa $x = 0$.

6. El punto $\mathcal{E} = (\infty, \infty)$ es una silla-nodo, y representa a $x = 0$. Las curvas integrales cerca de este punto son descritas por la siguiente expresión

$$[Z + (m + 1)V]^{m+2} Z^{-1}V^{2(m+1)} = K \quad (2.37)$$

donde K es una constante. Si $K = 0$ se obtiene el siguiente comportamiento asintótico

$$Z \propto \zeta^{-\frac{m+2}{m+1}}$$

$$h \propto x^{\frac{1}{m+1}} t^{\frac{\delta(m+2)-m-1}{m(m+1)}} \quad (2.38)$$

$$u \propto x^{-\frac{1}{m+1}} t^{\delta(\frac{m+2}{m+1})-1}$$

Si $K \neq 0$, el comportamiento asintótico es

$$Z \propto \zeta^{-2}$$

$$h \propto t^{\frac{2\delta-1}{m}} \quad (2.39)$$

$$u \propto t^{\delta-1}$$

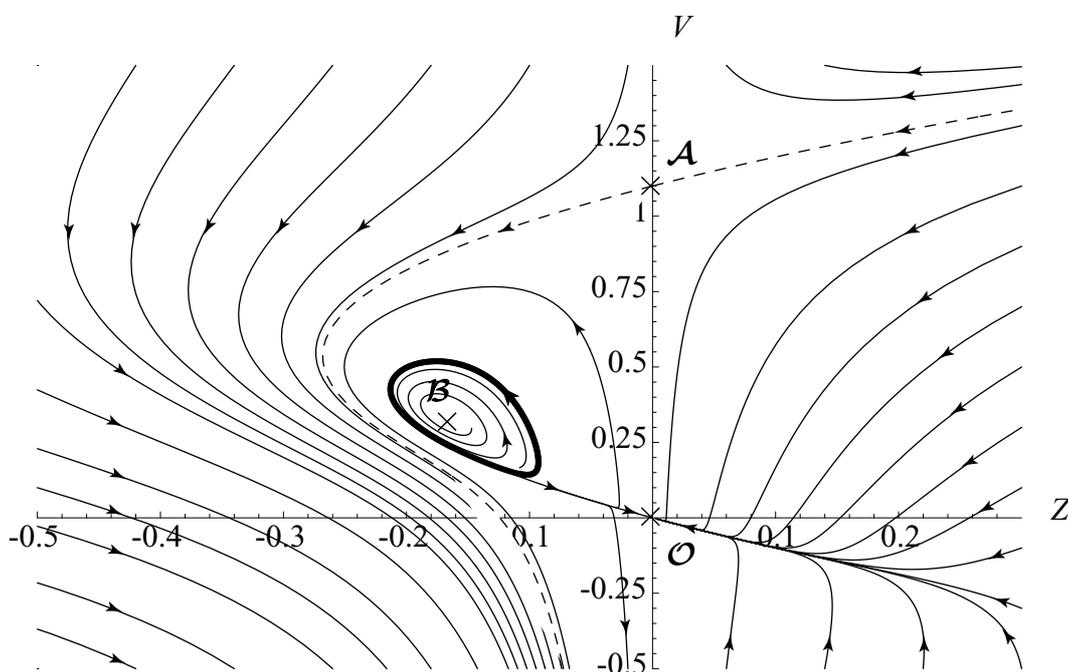


Figura 2.10: Topología del plano de fases (Z, V) con $\delta = 1.1$ y $m = 1$. Los puntos singulares \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{O} están indicados con una cruz. El trazo grueso corresponde al ciclo límite, y el trazo discontinuo a la curva integral que pasa por \mathcal{A} , que cerca de este punto está dada por (2.32). En cada trayectoria la flecha indica la dirección creciente de ζ .

Para poder apreciar las características del plano de fases, en las figuras 2.10 a 2.12 se muestran varias curvas integrales obtenidas por integración numérica de la ecuación (2.28). En la figura 2.10, el valor de δ es tal que hay un ciclo límite alrededor del punto \mathcal{B} ; en la 2.11 el valor es tal que \mathcal{B} es un foco, y por lo tanto las curvas que salen de \mathcal{B} lo hacen en forma de espiral; finalmente, en la figura 2.12 el valor de δ hace que el punto \mathcal{B} sea un nodo. En los tres casos el valor de m es 1.

En resumidas cuentas, las características del plano de fases de interés para

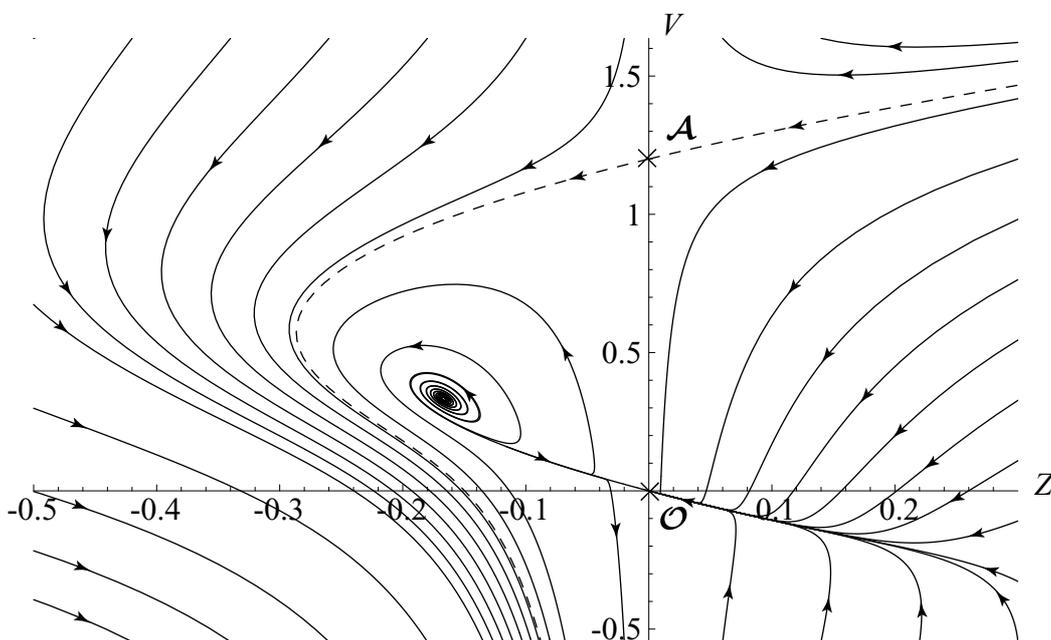


Figura 2.11: Topología del plano de fases (Z, V) con $\delta = 1.2$ y $m = 1$. Los puntos singulares \mathcal{A} y \mathcal{O} están indicados con una cruz, y el \mathcal{B} se halla en el centro de la espiral (por claridad no está marcado). El trazo discontinuo corresponde a la curva integral que pasa por \mathcal{A} , que cerca de este punto está dada por (2.32). En cada trayectoria la flecha indica la dirección creciente de ζ .

nosotros son los puntos singulares \mathcal{O} , \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{E} y el ciclo límite, puesto que a partir de ellos se construyen las soluciones autosemejantes relevantes para este trabajo, es decir, aquellas que presentan tiempo de espera. A continuación daremos dos ejemplos de como se construye una solución autosemejante usando el plano de fases, uno de Primera Especie y el otro de Segunda Especie. Tales ejemplos nos permitirán además aclarar las diferencias entre las autosemejanzas de ambas especies.

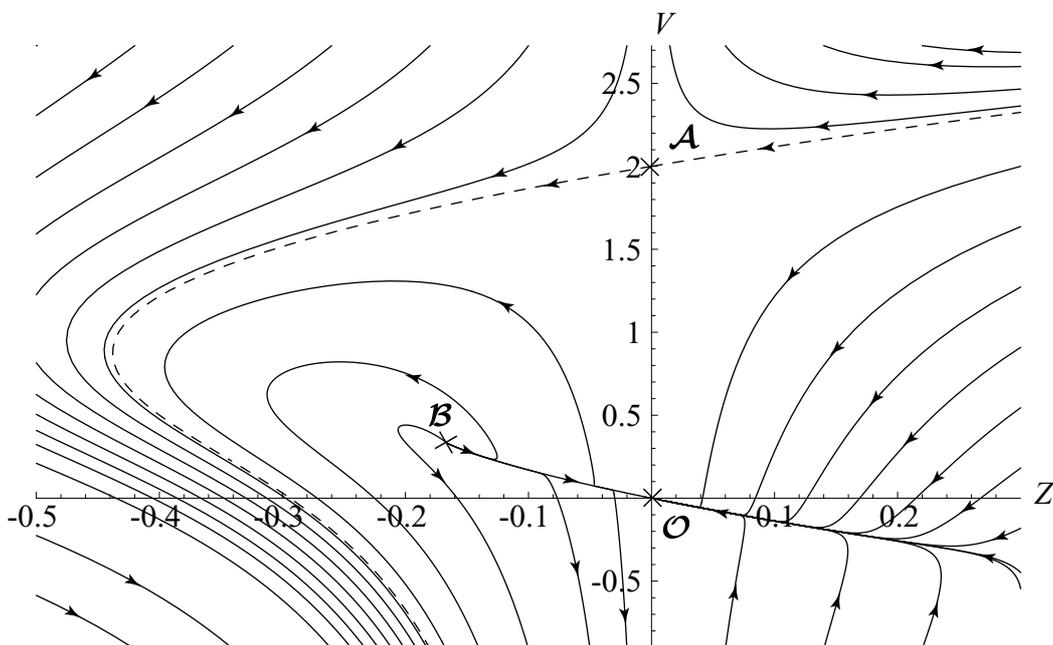


Figura 2.12: Topología del plano de fases (Z, V) con $\delta = 2$ y $m = 1$. Los puntos singulares \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{O} están indicados con una cruz. El trazo discontinuo corresponde a la curva integral que pasa por \mathcal{A} , que cerca de este punto está dada por (2.32). En cada trayectoria la flecha indica la dirección creciente de ζ .

Un ejemplo de solución autosemejante de Primera Especie

Buscaremos aquí la solución autosemejante cuando en $x = 0$ hay una fuente de h tal que la masa de la solución varía con el tiempo de acuerdo a una ley de potencia. Esta solución debe verificar la siguiente relación

$$\int_0^{x_f(t)} h(x, t) dx = q_\mu t^\mu \tag{2.40}$$

donde la constante $q_\mu > 0$ es el parámetro dimensional del problema. Esta solución se extiende desde $x = 0$ hasta el infinito. Puesto que el problema involucra una única constante dimensional, la solución es autosemejante, y aplicando el análisis dimensional es posible determinar la variable de autosemejanza. En efecto, indicando las dimensiones de x y t con L y T respectivamente, vemos de (1.1) y (2.40) que

$$[h] = (L^2/T)^{1/m} \quad (2.41)$$

$$[q_\mu] = (L^{2+m}/T^{\mu m+1})^{1/m}$$

Tomando $b = q_\mu^\nu$ y requiriendo que la variable de autosemejanza $\zeta = x/bt^\delta$ sea adimensional determinamos el valor de δ y ν

$$\delta = \frac{\mu m + 1}{m + 2} \quad (2.42)$$

$$\nu = \frac{m}{m + 2}$$

Esto caracteriza a una solución autosemejante como de Primera Especie: el exponente de autosemejanza δ se halla a partir de consideraciones dimensionales.

Para obtener la solución autosemejante debemos ahora recordar que esta se extiende desde $x = 0$ hasta el frente en $x = x_f(t)$. Por lo tanto, esta solución en el plano de fases está representada por la curva integral que va del punto \mathcal{A} al punto \mathcal{E} , con el valor de δ dado por (2.42).

Un ejemplo de solución autosemejante de Segunda Especie

Primero debemos decir que el formalismo de fases presentado en la Sección 2.3.1 puede ser fácilmente generalizado a los casos con simetría axial y esférica. En estos casos, la topología del plano de fases no cambia cualitativamente, y los puntos singulares mantienen su significado.

Imaginemos un flujo con simetría axial cerrándose hacia el origen, como podría ocurrir si inicialmente h es diferente de cero sólo fuera de una pared circular y en el interior de ésta es $h = 0$. Si la pared es súbitamente removida, el flujo tendrá un frente convergente, cuyo radio disminuye y que finalmente a $t = 0$ colapsará en el origen. Consideraremos la etapa final de este proceso, cuando el frente está por colapsar. Entonces nos interesan las propiedades del flujo para x pequeño comparado con cualquier longitud característica que las condiciones iniciales puedan introducir (por ejemplo, el radio de la pared circular). En esta situación no hay parámetros dimensionales constantes que gobiernen el problema, pues aquellos introducidos por las condiciones iniciales no pueden ser relevantes. En consecuencia, la solución será autosemejante, pero el exponente δ no puede ser determinado a partir de consideraciones dimensionales. Luego, este es un caso de autosemejanza de Segunda Especie.

Como la solución tiene un frente móvil, debe estar representada en el plano de fases por una trayectoria integral que emerge del punto \mathcal{A} . Dado que nos interesa sólo los momentos previos al colapso, resulta $t < 0$. Entonces la curva integral de interés debe estar en el semiplano $Z < 0$. Para $Z < 0$ la curva que sale del punto \mathcal{A} puede ir hacia \mathcal{B} , \mathcal{O} o \mathcal{C} . Pero las curvas que van de \mathcal{A} hacia \mathcal{B} o \mathcal{C} representan soluciones que divergen cuando $t \rightarrow 0$, por lo que no pueden representar la solución buscada. Por lo tanto, la solución está

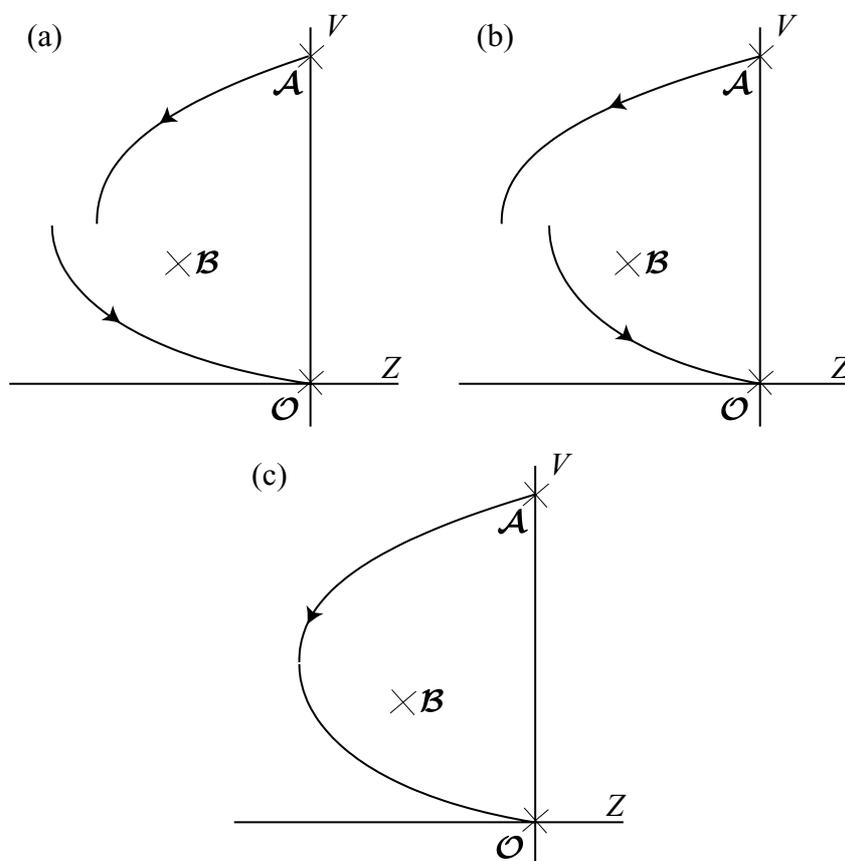


Figura 2.13: Para $Z < 0$ los puntos \mathcal{A} y \mathcal{O} son sillars, por lo que una curva uniéndolos sólo existe para $\delta = \delta_c$. (a) $\delta < \delta_c$; (b) $\delta > \delta_c$; (c) $\delta = \delta_c$.

representada por una curva integral que une los puntos \mathcal{A} y \mathcal{O} . Tal curva existe sólo para un determinado valor de δ , al que llamaremos δ_c , que debe ser determinado numéricamente (ver figura 2.13).

Hemos visto así que en el presente caso, el valor del exponente de autosemejanza δ es determinado resolviendo un problema de autovalores (no por análisis dimensional, como en la Sección anterior). Esto es típico de problemas autosemejantes de Segunda Especie.

2.3.2 Autosemejanza cerca del frente que espera

Soluciones autosemejantes de interés

En esta Sección se discutirán las soluciones autosemejantes de la ecuación (1.1) que pueden describir la asintótica cerca del frente que espera (para más detalles ver Lacey et al. 1982; Gratton y Minotti 1990; Gratton y Vigo 1998). Al respecto, son de interés dos familias de soluciones: las soluciones LOT y las soluciones A. Todas ellas son soluciones *exactas* de la ecuación de difusión no lineal (1.1), aunque no se pueden expresar en forma cerrada salvo en un único caso.

Las soluciones LOT, que indicaremos con $h^*(x, t)$, son una familia de soluciones autosemejantes con tiempo de espera que se pueden extender a $t > 0$; fueron descubiertas por Lacey, Ockendon, y Tayler (1982) y sus propiedades fueron discutidas en detalle por Gratton y Vigo (1998). Existen para cualquier $\delta > 1$ y pueden ser de tres tipos que llamaremos L, S y N, de acuerdo a su comportamiento para $t < 0$. Cuando $1 < \delta < \delta_0$ la solución es del tipo L y la trayectoria emana del ciclo límite, que representa al frente que espera antes de arrancar. Cada vuelta alrededor del ciclo límite produce oscilaciones de V y Z . Cuando δ es cercano a la unidad, el ciclo límite llega cerca del punto \mathcal{A} . Entonces, cada vez que ζ es tal que el punto $(Z(\zeta), V(\zeta))$ pasa cerca de \mathcal{A} la derivada $\partial_x h$ sufre una variación brusca y por lo tanto la solución presenta un corner layer. Como resultado la solución $h^*(x, t < 0)$ muestra una sucesión infinita de corner layers que se acumulan en el frente. A medida que $\delta \rightarrow \delta_0$, el ciclo límite se hace más pequeño. Por lo tanto las oscilaciones de V y Z en cada vuelta tienen menor amplitud, la solución pasa más lejos de \mathcal{A} y las variaciones de $\partial_x h$ se suavizan de manera que el corner

layer se debilita. Si $\delta_0 < \delta < \delta_+$ la solución es del tipo S y la trayectoria es una espiral que sale del punto singular \mathcal{B} , que es quien ahora representa al frente que espera. En este caso, las oscilaciones de V y Z a medida que la solución se aproxima a \mathcal{B} se amortiguan. Si $\delta > \delta_+$ las soluciones son N y la trayectoria emana del punto \mathcal{B} pero sin rodearlo. En este caso la solución no presenta oscilaciones de V y Z . En cualquiera de los tres casos la curva integral termina en el punto \mathcal{O} que representa a $x = \infty$.

Hasta aquí describimos como construir una solución LOT para el período de espera, es decir $t < 0$. Para $t > 0$ la solución debe poseer un frente que avanza, por lo que la curva integral debe contener al punto singular \mathcal{A} . La parte del perfil que va desde $x = 0$ hasta el frente móvil (que para $t > 0$ se encuentra en $x < 0$) es representada por una curva integral que va desde el punto singular \mathcal{E} (que representa a $x = 0$) hasta el punto singular \mathcal{A} . La parte del perfil que va desde $x = 0$ hasta $x = \infty$ es descrita por una curva integral que desde el punto \mathcal{E} viene hasta el punto \mathcal{O} . En las figuras 2.14, 2.15 y 2.16 se muestran las curvas integrales que representan tres soluciones LOT, una de cada tipo: L, S y N respectivamente ($m = 1$ para los tres casos). Además, en las figuras 2.17 a 2.20 mostramos la trayectoria integral en el plano de fases para una solución LOT tipo L, las variables h y u en gráficos doble logarítmicos de modo que sea posible apreciar la sucesión de corner layers, y la variable h en escala lineal a tres tiempos distintos con el objeto de presentar el perfil real de esta solución. Los mismos gráficos para una solución tipo S se muestran en las figuras 2.21 a 2.24, y para una solución tipo N en 2.25 a 2.28.

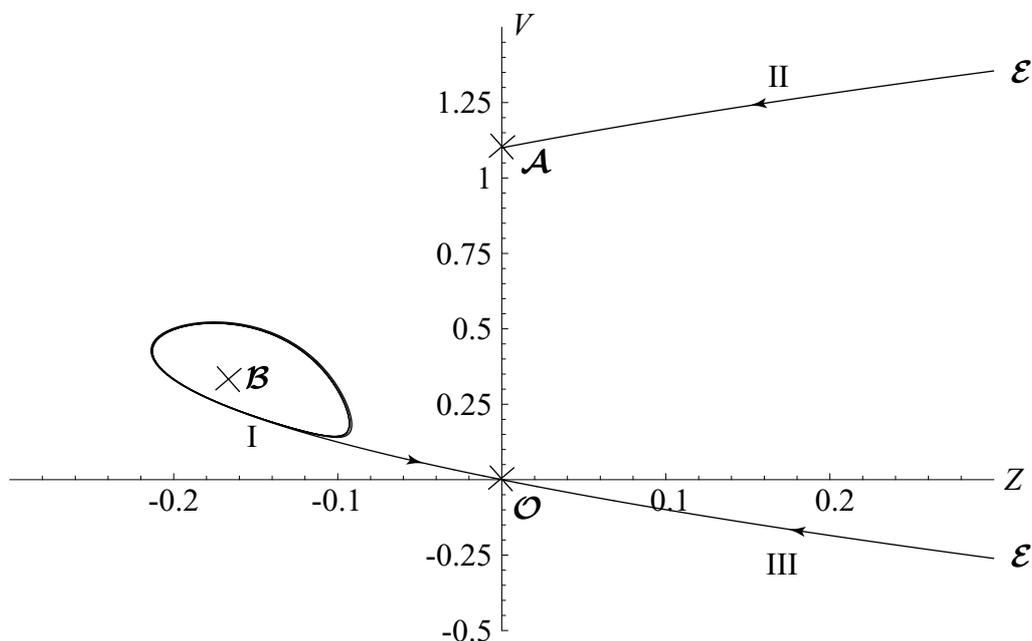


Figura 2.14: Curva integral correspondiente a la solución autosemejante LOT del tipo L, con $\delta = 1.1$ y $m = 1$. El tramo I describe la solución para $t < 0$, y va desde el ciclo límite, que representa al frente que espera, hasta el punto \mathcal{O} , que representa $x = \infty$. Los tramos II y III describen la solución para $t > 0$. El tramo II va desde el punto \mathcal{E} , que representa a $x = 0$, hasta el punto \mathcal{A} , que representa al frente móvil. El tramo III va desde el punto \mathcal{E} hasta el punto \mathcal{O} .

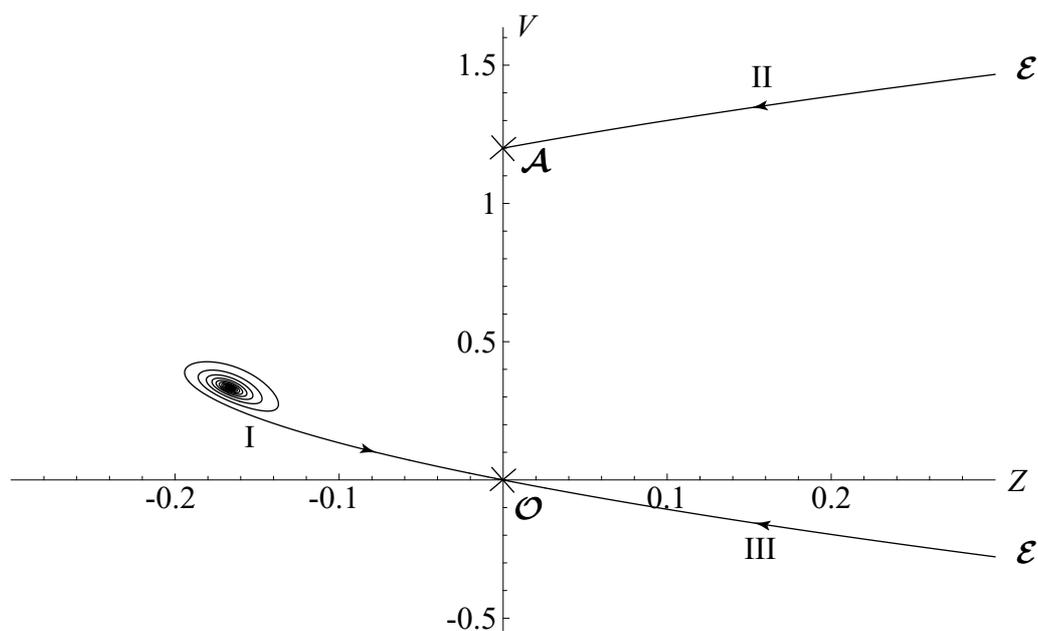


Figura 2.15: Curva integral correspondiente a la solución autosemejante LOT del tipo S, con $\delta = 1.2$ y $m = 1$. El tramo I describe la solución para $t < 0$, y va desde el punto \mathcal{B} , que representa al frente que espera, hasta el punto \mathcal{O} , que representa $x = \infty$. Los tramos II y III describen la solución para $t > 0$. El tramo II va desde el punto \mathcal{E} , que representa a $x = 0$, hasta el punto \mathcal{A} , que representa al frente móvil. El tramo III va desde el punto \mathcal{E} hasta el punto \mathcal{O} .

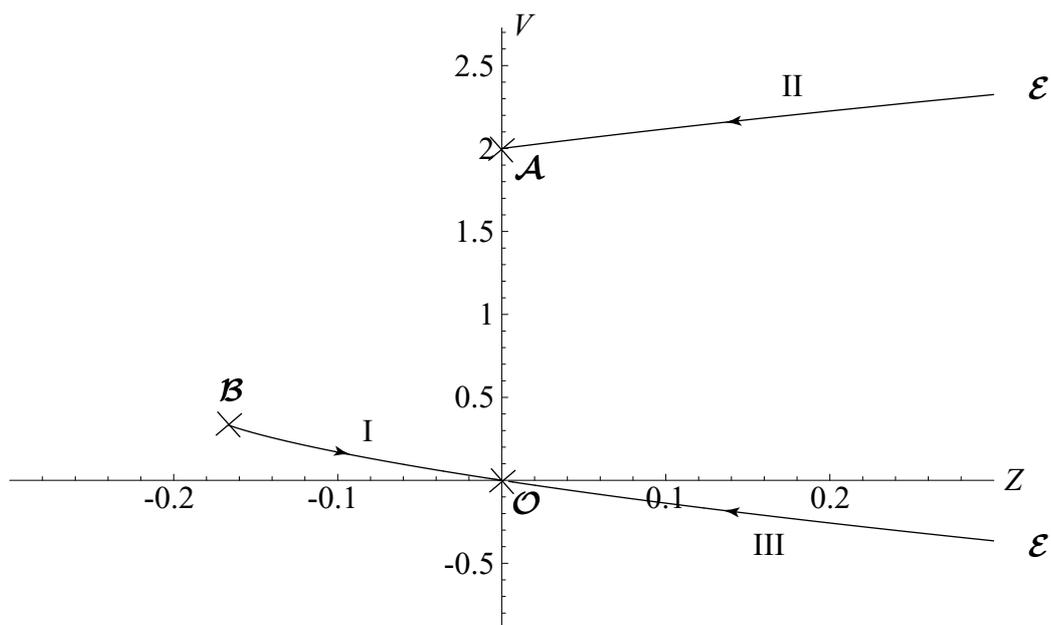


Figura 2.16: Curva integral correspondiente a la solución autosemejante LOT del tipo N, con $\delta = 2$ y $m = 1$. El tramo I describe la solución para $t < 0$, y va desde el punto \mathcal{B} , que representa al frente que espera, hasta el punto \mathcal{O} , que representa $x = \infty$. Los tramos II y III describen la solución para $t > 0$. El tramo II va desde el punto \mathcal{E} , que representa a $x = 0$, hasta el punto \mathcal{A} , que representa al frente móvil. El tramo III va desde el punto \mathcal{E} hasta el punto \mathcal{O} .

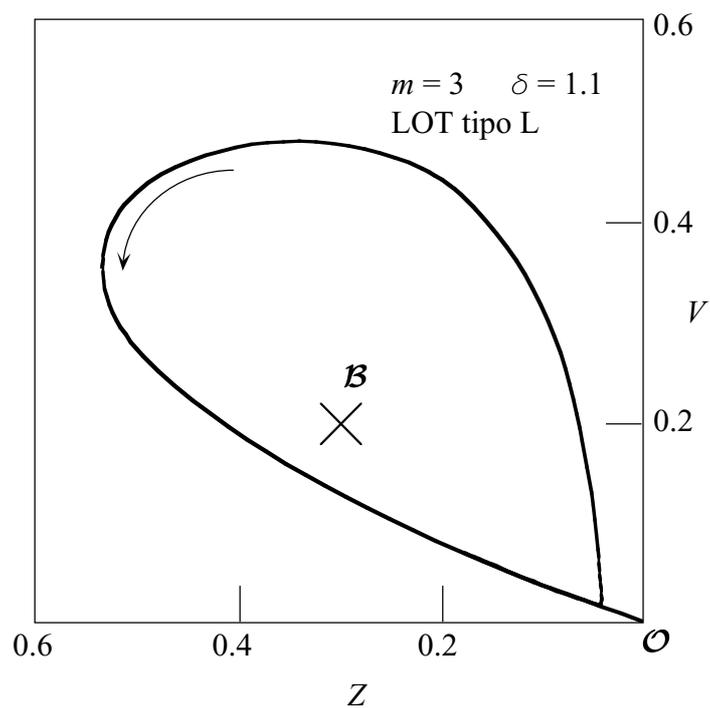


Figura 2.17: Curva integral en el plano de fases para $t < 0$ de una solución LOT tipo L. Cada vuelta alrededor del ciclo límite genera oscilaciones de Z y V .

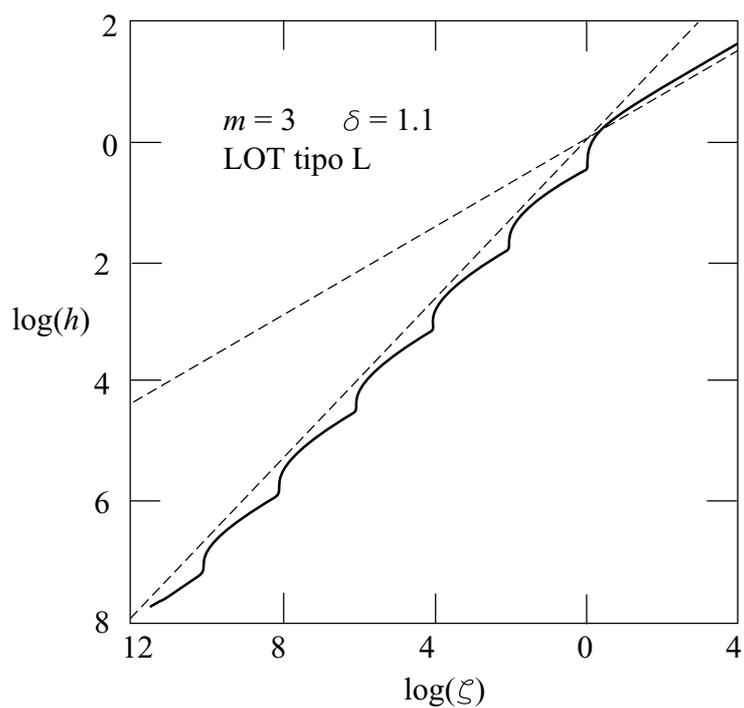


Figura 2.18: Gráfico doble logarítmico de h vs. ζ de la solución LOT tipo L que se muestra en la figura 2.17. Observemos que las oscilaciones de Z no se traducen en oscilaciones de h , que tiene un comportamiento monótono, sino en una sucesión de corner layers. La línea punteada y la de trazos corresponden respectivamente al comportamiento asintótico cerca de \mathcal{B} y \mathcal{O} .

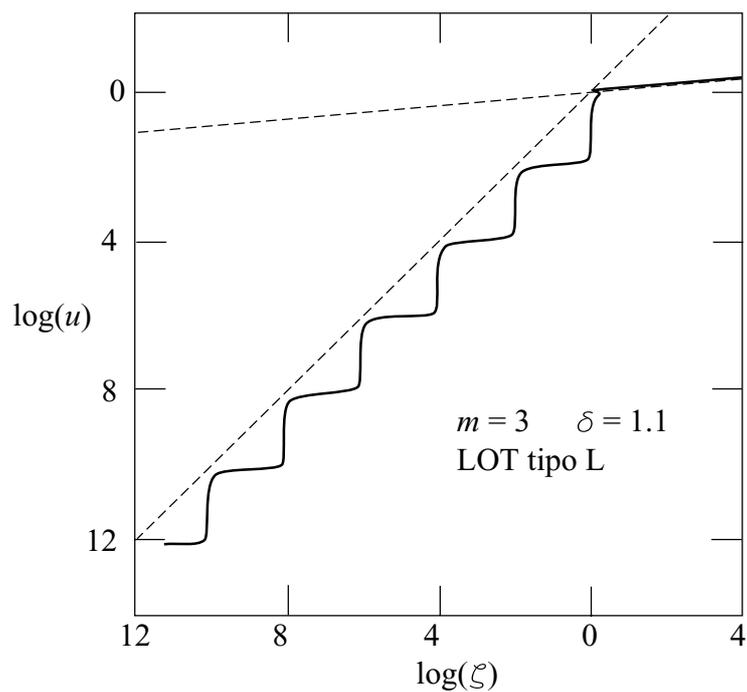


Figura 2.19: Gráfico doble logarítmico de u vs. ζ de la solución LOT tipo L que se muestra en la figura 2.17. Observemos que las oscilaciones de V no se traducen en oscilaciones de u , que tiene un comportamiento monótono. La línea punteada y la de trazos corresponden respectivamente al comportamiento asintótico cerca de \mathcal{B} y \mathcal{O} .

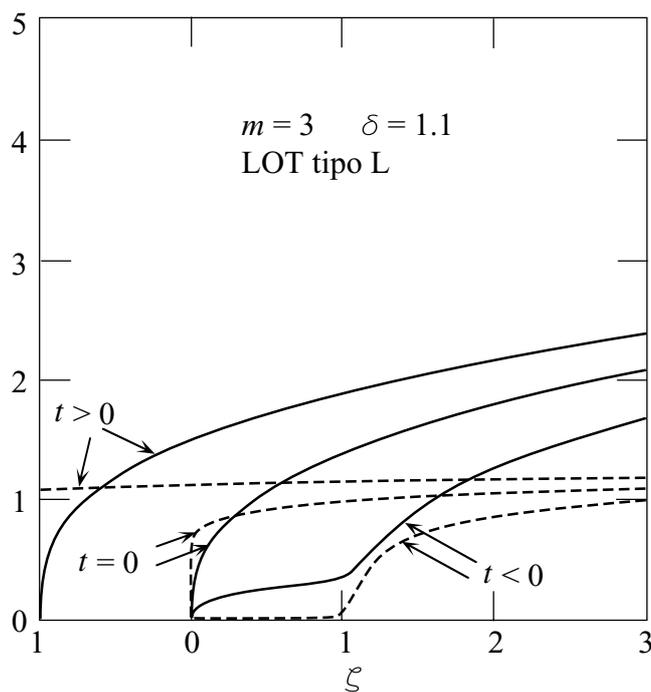


Figura 2.20: Perfiles de h (línea continua) y de u (línea de trazos) de la solución LOT tipo L que se muestra en la figura 2.17 a tres tiempos distintos: uno antes del arranque del frente, otro justo al momento del arranque, y el otro después del arranque. Notese que en el perfil para $t < 0$ se puede apreciar un sólo corner layer.

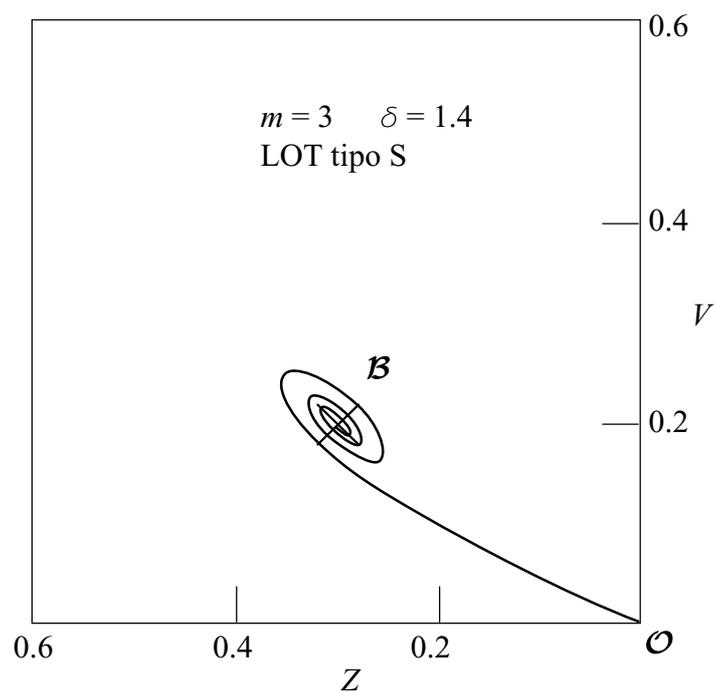


Figura 2.21: Curva integral en el plano de fases para $t < 0$ de una solución LOT tipo S. Cada vuelta de la espiral alrededor del punto B genera oscilaciones amortiguadas de Z y V .

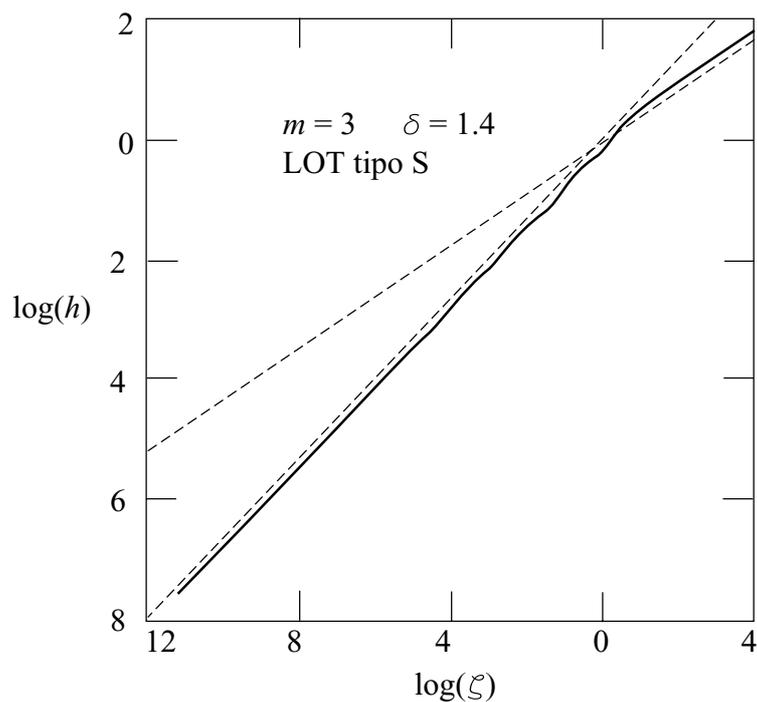


Figura 2.22: Gráfico doble logarítmico de h vs. ζ de la solución LOT tipo S que se muestra en la figura 2.21. Observemos que las oscilaciones amortiguadas de Z no se traducen en oscilaciones de h , que tiene un comportamiento monótono, sino en una sucesión de corner layers que se debilitan progresivamente. La línea punteada y la de trazos corresponden respectivamente al comportamiento asintótico cerca de \mathcal{B} y \mathcal{O} .

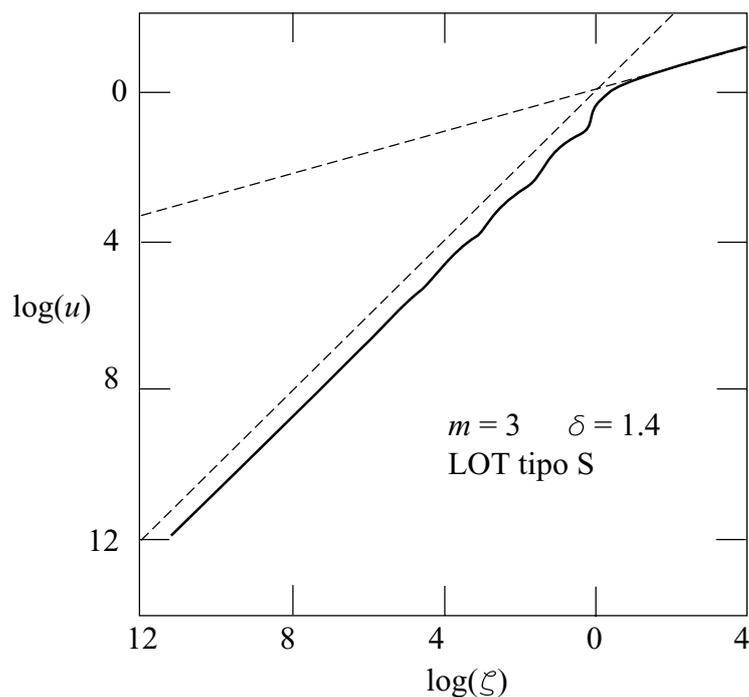


Figura 2.23: Gráfico doble logarítmico de u vs. ζ de la solución LOT tipo S que se muestra en la figura 2.21. Observemos que las oscilaciones de V no se traducen en oscilaciones de u , que tiene un comportamiento monótono. La línea punteada y la de trazos corresponden respectivamente al comportamiento asintótico cerca de \mathcal{B} y \mathcal{O} .

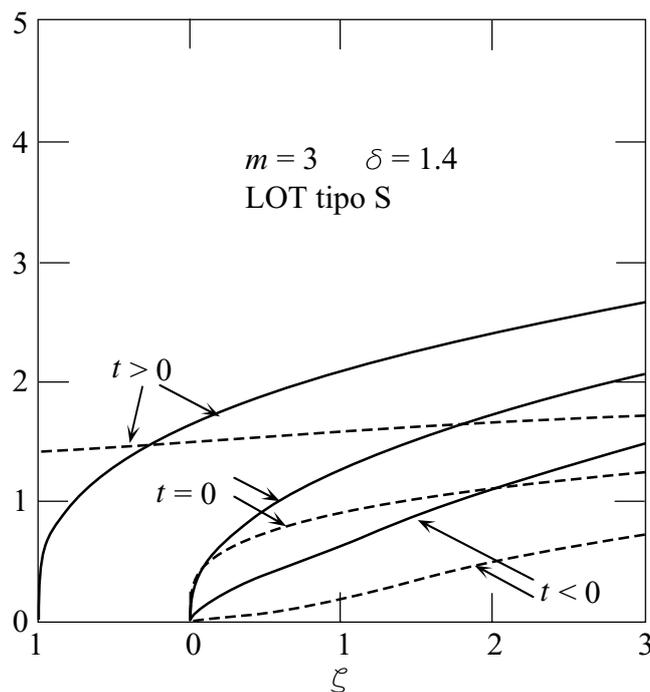


Figura 2.24: Perfiles de h (línea continua) y de u (línea de trazos) de la solución LOT tipo S que se muestra en la figura 2.21 a tres tiempos distintos: uno antes del arranque del frente, otro justo al momento del arranque, y el otro después del arranque. Notese que en el perfil para $t < 0$ se puede apreciar un sólo corner layer, pero más tenue que en la figura 2.20.

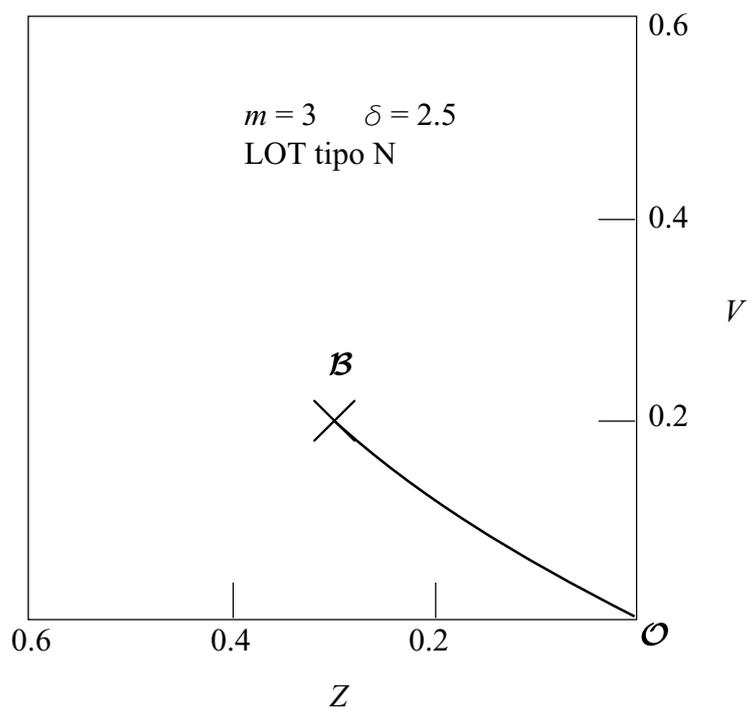


Figura 2.25: Curva integral en el plano de fases para $t < 0$ de una solución LOT tipo N. A diferencia del las soluciones tipo L y S, en este caso no hay oscilaciones de Z y V .

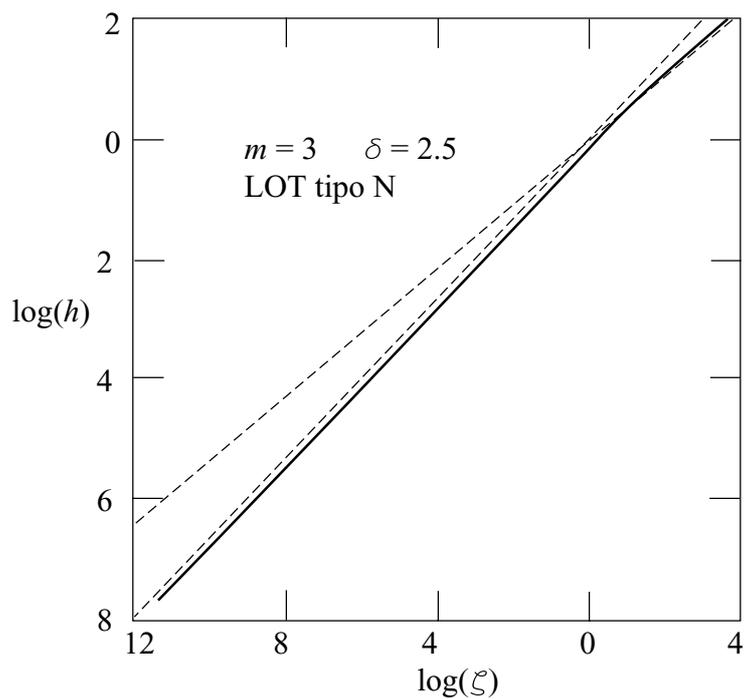


Figura 2.26: Gráfico doble logarítmico de h vs. ζ de la solución LOT tipo N que se muestra en la figura 2.25. En este tipo de solución no se observan corner layers. La línea punteada y la de trazos corresponden respectivamente al comportamiento asintótico cerca de \mathcal{B} y \mathcal{O} .

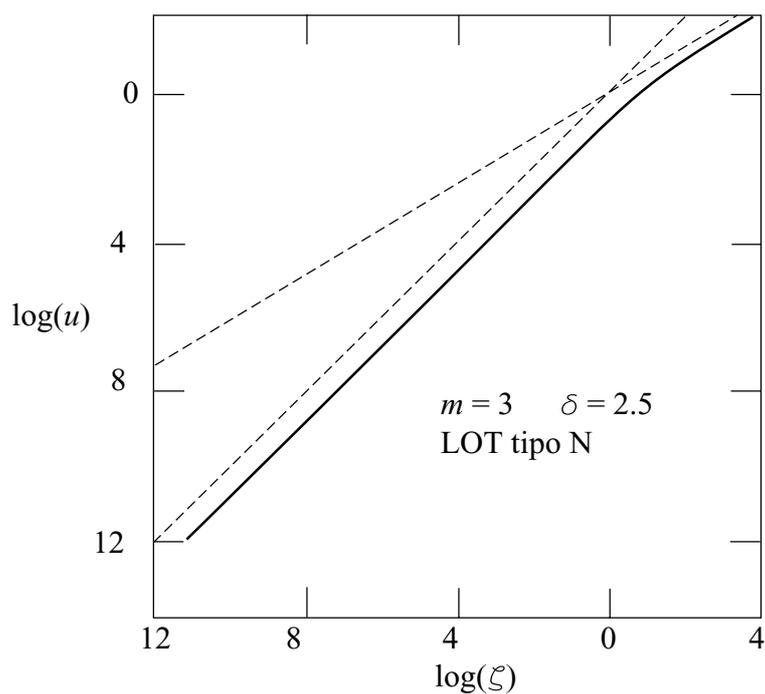


Figura 2.27: Gráfico doble logarítmico de u vs. ζ de la solución LOT tipo N que se muestra en la figura 2.25. La línea punteada y la de trazos corresponden respectivamente al comportamiento asintótico cerca de \mathcal{B} y \mathcal{O} .

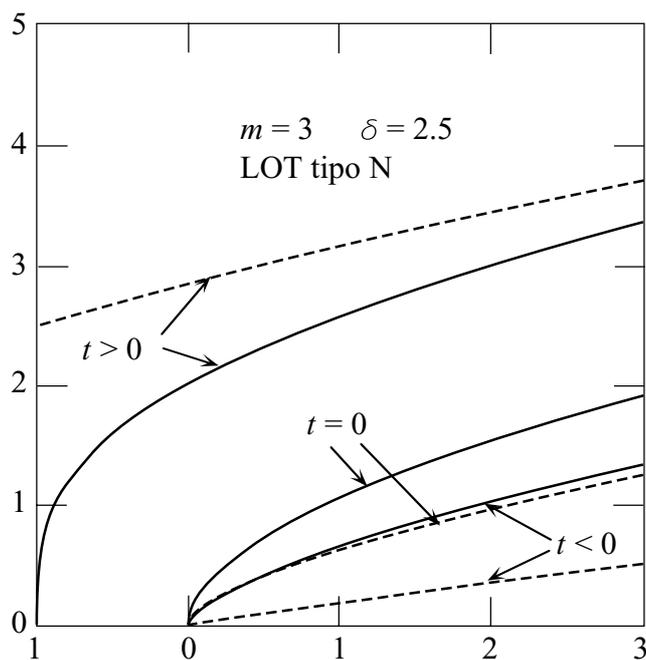


Figura 2.28: Perfiles de h (línea continua) y de u (línea de trazos) de la solución LOT tipo N que se muestra en la figura 2.25 a tres tiempos distintos: uno antes del arranque del frente, otro justo al momento del arranque, y el otro después del arranque. A diferencia de las figuras 2.20 y 2.24, no hay un corner layer.

Las soluciones A existen para cualquier $\delta \leq 1$ e incluyen como caso especial la onda viajera (2.4), que corresponde a $\delta = 1$. En verdad, las soluciones A tienen un frente móvil, no uno que espera, por lo que el lector podría preguntarse porqué se las considera relevantes en este contexto. La razón es que las soluciones A pueden describir el comportamiento de un corner layer fuerte, en el límite en que $h(x, t)$ es despreciablemente pequeña delante de él, y el corner layer es casi un corner shock (notese que en este límite el término difusivo $m\eta\partial_{xx}\eta$ en la ecuación (1.4) es despreciable). De hecho, la diferencia entre un corner layer muy fuerte y un frente móvil es insignificante, de modo que a todos los efectos prácticos pueden ser considerados la misma cosa (Aronson et al. 1985). La construcción de las soluciones A para $\delta < 1$ se describe en Gratton y Vigo 1998; dado que ellas divergen en $t = 0$, no pueden representar las asintóticas de nuestras soluciones numéricas en el momento del arranque ni después de él. Por otra parte, la solución de onda viajera tiene un comportamiento regular en $t = 0$ y como se verá juega un rol muy importante en nuestro problema de valores iniciales.

Velocidad de arranque de las soluciones autosemejantes

La velocidad del frente de una solución autosemejante para $t \geq 0$ está dada por $\dot{x}_f = \zeta_f t^{\delta-1}$ (ζ_f es el valor de ζ en el frente). Por lo tanto, el frente de las soluciones LOT arranca con velocidad nula, de modo que ellas no pueden describir el comportamiento asintótico de las soluciones de (1.1) y (1.5) hasta $x = 0$; sin embargo, ellas podrían aun describir la asintótica en un dominio que *excluya* al frente (*i. e.* para $0 < \varepsilon \ll |x| \ll x_0$, $0 < \varepsilon' \ll h \ll h_0$, $|t| \ll t_0$, donde ε , ε' son cantidades pequeñas). Por otro lado, la solución tipo onda viajera dada por la ecuación (2.4) satisface la condición (2.24)

dado que $\hat{c} = c$ puede tomar cualquier valor finito, entonces puede describir la asintótica en las cercanías de $t = 0$ *incluyendo* al frente mismo (*i. e.* para $0 < |x| \ll \varepsilon$, $0 < h \ll \varepsilon'$, $|t| \ll t_0$). Como ya dijimos, la onda viajera para $t \rightarrow 0^-$ describe un corner layer fuerte moviéndose con velocidad constante hacia el frente que espera, y para $t \rightarrow 0^+$ describe al frente que ha comenzado a moverse con la misma velocidad constante. Por supuesto, en este contexto, velocidad constante significa que las velocidades del corner layer y del frente son la misma y no varían sobre una escala de tiempo $|t| \ll t_0$, en otras palabras, al momento del arranque, el corner layer se transforma en el frente (Lacey 1983).

Gratton y Vigo (1998) y Perazzo et al. (1999) investigaron la asintótica de las soluciones numéricas de (1.1) y (1.5) para $m = 3$ y $m = 1$. Para $m = 3$ encontraron que las soluciones LOT del tipo L describen la asintótica de $h(x, t)$ en un dominio que *excluye* al corner layer y al frente, y que el exponente de autosemejanza δ depende de las condiciones iniciales a través del parámetro α . También encontraron que en sus soluciones se desarrolla un *único* corner layer. En el caso $m = 1$ dichos autores encontraron resultados similares, pero además detectaron soluciones LOT del tipo S cuando α es muy próximo a 1. En ambos casos el movimiento del corner layer y el del frente inmediatamente después de su arranque, y sus perfiles muy cerca de $x = 0$ corresponden a una onda viajera, tal como era de esperar a partir de la teoría.

2.4 Propiedades de escala de la ecuación de difusión no lineal

Aquí nos interesa establecer ciertas propiedades de escala de la ecuación (1.1). Supongamos que tenemos una solución de esta ecuación $h = h(x, t)$ con perfil inicial $h_0 = h_0(x)$. Definimos ahora las nuevas variables

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= bx \\ \tilde{t} &= ct\end{aligned}\tag{2.43}$$

$$\tilde{h} = ah(\tilde{x}, \tilde{t}) = ah(bx, ct)$$

Queremos establecer una relación entre a , b y c de modo que \tilde{h} también sea una solución de (1.1).

A partir de (2.43) es fácil obtener que

$$\partial_t \tilde{h} = ac \partial_{\tilde{t}} h(\tilde{x}, \tilde{t})\tag{2.44}$$

$$\partial_x \left(\tilde{h}^m \partial_x \tilde{h} \right) = a^{m+1} b^2 \partial_{\tilde{x}} \left(h^m(\tilde{x}, \tilde{t}) \partial_{\tilde{x}} h(\tilde{x}, \tilde{t}) \right)$$

Dado que h es solución, si $c = a^m b^2$ entonces \tilde{h} también lo será. Podemos entonces establecer la siguiente propiedad de las soluciones de (1.1):

Si $h = h(x, t)$ es solución de la ecuación de difusión no lineal (1.1) con perfil inicial $h_0 = h_0(x)$, $\implies \tilde{h} = \tilde{h}(x, t) = ah(bx, a^m b^2 t)$ también es solución, con perfil inicial $\tilde{h}_0 = ah_0(bx)$.

A partir de esta propiedad, es inmediato que

Si h tiene tiempo de espera t_w , entonces \tilde{h} tiene tiempo de espera $\tilde{t}_w = t_w/a^m b^2$.

Si h tiene masa $M = \int_{-\infty}^{\infty} h dx$, entonces \tilde{h} tiene masa $\tilde{M} = aM/b$.

Si h tiene velocidad u , entonces \tilde{h} tiene velocidad $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t) = a^m b u(bx, a^m b^2 t)$.

Capítulo 3

Métodos

En este Capítulo haremos una descripción de los métodos empleados en este trabajo, de modo que el lector interesado pueda reproducir nuestros resultados. En primer lugar mostraremos el esquema numérico utilizado. Posteriormente se presentarán los métodos de análisis que nos permiten obtener la información deseada a partir de los datos obtenidos numéricamente.

3.1 Método Numérico

Para resolver el problema (1.1), (1.5) introducimos las variables adimensionales $x' \equiv x/x_0$, $h' \equiv h/h_0$, $t' \equiv t/t_0$; el valor de h_0 se elige de modo de satisfacer la condición de normalización $\int h'(x', t'_i) dx' = 1$ (en adelante omitiremos las primas). La ecuación (1.1) es invariante frente a este cambio de variables, y la condición inicial (1.5) ahora es:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (\alpha q + 1)x^{\alpha q} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

La condición de contorno toma la forma $\partial_x h(1, t) = 0$. El código emplea una variable temporal cuyo valor inicial es $t = 0$ y después de la integración determinamos t_w y redefinimos el tiempo restando t_w de modo que el frente arranca en $t = 0$. Computar las soluciones con exactitud suficiente para revelar los detalles que estamos buscando no es un asunto trivial, ya que nuestro problema tiene escalas múltiples y las derivadas de las soluciones con tiempo de espera tienen variaciones muy fuertes en el entorno del corner layer que invariablemente aparece en la etapa de espera.

Para alcanzar una buena resolución cerca de $x = 0$ (el dominio más interesante para nuestros propósitos) con un número manejable de puntos de grilla, estamos forzados a emplear una grilla con un espaciado que depende cuadráticamente de $|x|$ (Kálnay de Rivas 1972), con $2N + 1$ puntos entre -1 y $+1$. La desventaja de esto es que la desviación de la solución numérica desde la verdadera solución depende del espaciado de los puntos de la grilla. Si estas desviaciones no son reconocidas, pueden llevar a interpretaciones erróneas. Por ejemplo, la solución numérica que representa la onda viajera (2.4) muestra un cambio de la velocidad y de la forma del perfil a medida que se propaga a través de la grilla no uniforme. Para reconocer y descartar estos efectos espurios debido a la no uniformidad de la grilla comparamos en unos pocos casos las soluciones obtenidas con diferentes N hasta $N = 4000$ (usando en cada caso el apropiado paso temporal). Excepto cuando se indique lo contrario, todos los cálculos fueron hechos con $N = 1000$.

Para discretizar la ecuación (1.1) se empleó un esquema implícito de di-

ferencias finitas a segundo orden. Se indicará con h_j^n el valor discretizado de h en $x = x_j$ y $t = t_n = n\Delta t$, donde x_j es la posición del j -ésimo punto de la grilla y Δt es el paso temporal de integración (j y n son enteros no negativos). El miembro izquierdo de (1.1) se discretizó de la siguiente manera

$$\partial_t h(x_j, t_n) = \frac{3h_j^n - 4h_j^{n-1} + h_j^{n-2}}{2\Delta t} \quad (3.2)$$

donde el error es del orden de Δt^2 .

El miembro derecho de (1.1) para x_j y t_n se discretizó de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial_x (h^m \partial_x h) = & \frac{1}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left\{ [(h_{j+1}^n)^m + (h_j^n)^m] \left(\frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{x_{j+1} - x_j} \right) - \right. \\ & \left. - [(h_j^n)^m + (h_{j-1}^n)^m] \left(\frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{x_j - x_{j-1}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora se debe elegir la posición x_j de los puntos de la grilla. A este fin, se define z tal que $x = z|z|$, y los x_j quedan determinados por los correspondientes z_j elegidos como

$$z_j = j \Delta z - 1, \text{ con } 0 \leq j \leq 2N \quad (3.4)$$

donde $\Delta z = \frac{1}{N}$. Reemplazando estas últimas definiciones en la ecuación (3.3) esta toma la forma

$$\begin{aligned} \partial_x (h^m \partial_x h) = \frac{1}{4z_j \Delta z^2} \left\{ [(h_{j+1}^n)^m + (h_j^n)^m] \left(\frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{2z_j + \Delta z} \right) - \right. \\ \left. - [(h_j^n)^m + (h_{j-1}^n)^m] \left(\frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{2z_j - \Delta z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

si $z_j \neq 0$ ($j \neq N$). Para $z_j = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \partial_x (h^m \partial_x h) = \frac{1}{4\Delta z^4} \left\{ [(h_{N+1}^n)^m + (h_N^n)^m] (h_{N+1}^n - h_N^n) - \right. \\ \left. - [(h_N^n)^m + (h_{N-1}^n)^m] (h_N^n - h_{N-1}^n) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

El error de esta discretización es del orden de $(x_{j+1} - x_j)^2$, que, dado que los x_j no están uniformemente distribuidos, no es uniforme. El valor mínimo de dicho error se alcanza en $x = 0$ (el lugar más interesante a los fines de este trabajo) y es del orden de $1/N^4$. La situación más desfavorable es en $x = \pm 1$, donde el error es del orden de $4/N^2$.

Luego, con el objeto de resolver numéricamente la ecuación (1.1) se igualan los miembros derechos de las ecuaciones (3.2) y (3.5) o (3.6) formando así un sistema algebraico de ecuaciones que permite determinar h_j^n para $1 \leq j \leq 2N - 1$, a partir de conocer los valores de h_j^{n-1} y h_j^{n-2}

$$h_j^n = \frac{A_j^n h_{j+1}^n + B_j^n h_{j-1}^n + 4h_j^{n-1} - h_j^{n-2}}{3 + A_j^n + B_j^n} \quad (3.7)$$

donde

$$A_j^n = \frac{\Delta t}{2\Delta z^2} \frac{(h_{j+1}^n)^m + (h_j^n)^m}{z_j(2z_j + \Delta z)} \quad B_j^n = \frac{\Delta t}{2\Delta z^2} \frac{(h_j^n)^m + (h_{j-1}^n)^m}{z_j(2z_j - \Delta z)} \quad \text{si } j \neq N \quad (3.8)$$

$$A_N^n = \frac{\Delta t}{\Delta z^4} ((h_{N+1}^n)^m + (h_N^n)^m) \quad B_N^n = \frac{\Delta t}{\Delta z^4} ((h_N^n)^m + (h_{N-1}^n)^m) \quad (3.9)$$

En $j = 2N$, es decir en $x = 1$, al discretizar la condición de contorno impuesta $\partial_x h(1, t) = 0$, se obtiene $h_{2N+1}^n = h_{2N-1}^n$ para todo n . Entonces, en este punto se utilizan las ecuaciones (3.7) y (3.8), pero tomando $h_{2j+1}^n = h_{2j-1}^n$. En $j = 0$, es decir $x = -1$, se impuso $h_0^n = 0$. Este tratamiento numérico de las condiciones de contorno, junto con las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) cierran el problema numérico.

3.2 Métodos de análisis

Son necesarias ciertas elaboraciones no triviales de los datos numéricos provistos por nuestro código para analizar las soluciones y extraer de ellas la información deseada. Ahora discutiremos estas elaboraciones de manera que el lector pueda determinar la confiabilidad de nuestros resultados.

Mostraremos los resultados en términos de $\eta = h^m$ dado que facilitan la comparación para diferentes m , pues para un dado α los perfiles iniciales de η (a diferencia de los de h) tienen la misma forma independientemente de m , y que la onda viajera corresponde siempre a $\eta \propto x$.

3.2.1 Determinación de t_w

Con el objeto de hallar t_w registramos el valor de η en el frente para todo t , $\eta(0, t)$. En las figuras 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 mostramos cuatro ejemplos. Se puede observar que $\eta(0, t)$ permanece constante (y esencialmente nulo) hasta que en cierto instante comienza a crecer muy rápidamente, lo cual indica que el frente se ha puesto en movimiento. Por convención tomamos t_w como el momento en que $\eta(0, t)$ comienza a crecer, el cual fue determinado

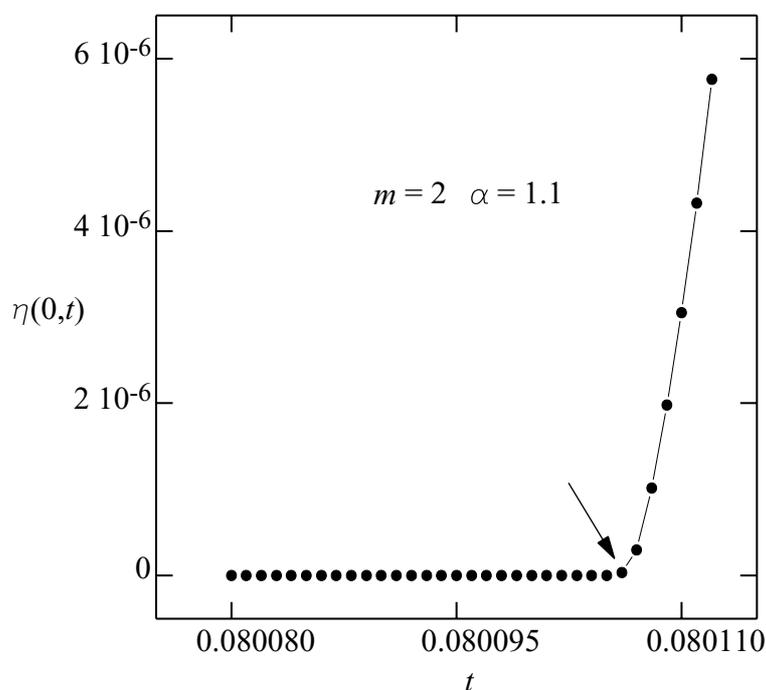


Figura 3.1: $\eta(0, t)$ vs t . En el gráfico se observa un cambio abrupto de comportamiento (indicado con una flecha). Tal cambio ocurre cuando el frente se pone en movimiento, y por definición tomamos como t_w el momento en que esto sucede. La escala de las abscisas indica los valores de la variable temporal utilizada por nuestro código numérico, previo a la sustracción de t_w .

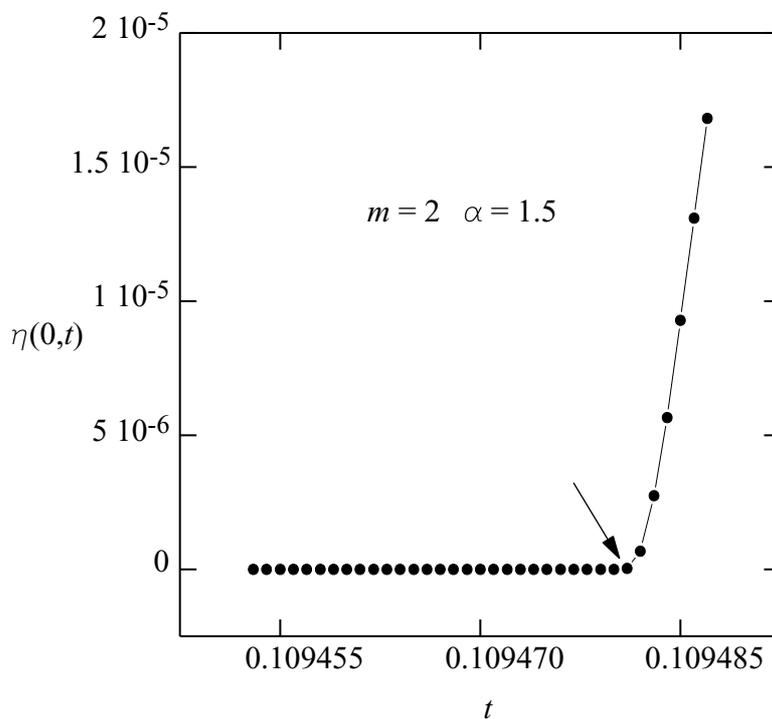


Figura 3.2: Ver la leyenda de la figura 3.1.

con una incertidumbre de a lo sumo dos pasos temporales de integración. Para comprobar la validez de esta convención hemos usado nuestro código para calcular numéricamente la solución fundamental (2.1) y determinar el tiempo en que su frente llega a $x = 1$ (por razones que serán claras más adelante llamamos t_∞ a este tiempo). Luego comparamos los resultados para diferentes m y $N = 1000$ con el valor teórico que se puede obtener fácilmente de la ecuación (2.1) y está dado por $t_\infty(m)$ (ecuación (2.22)).

Obsérvese (ver Tabla 3.1) que el t_∞ numérico difiere del correspondiente valor teórico en $\approx 0.005\%$ en todos los casos, excepto para $m = 1/2$ y $m = 9$ donde difiere en $\approx 0.05\%$. También estudiamos cómo depende de N el t_w numérico. Los valores del cociente $t_w(N)/t_w(N = 1000)$ para $m = 2$, $\alpha = 1.3$

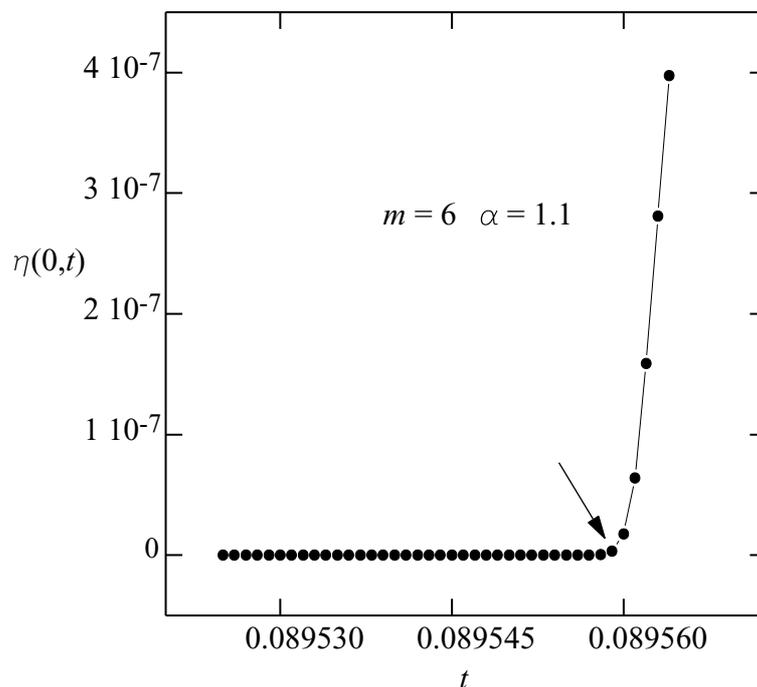


Figura 3.3: Ver la leyenda de la figura 3.1.

(calculados con $\Delta t \simeq 1/N^2$) se muestran en la figura 3.5. Se puede ver que la curva tiende a saturar rápidamente y que la diferencia entre $t_w(4000)$ y $t_w(1000)$ es solo un $\approx 0.001\%$. Concluimos que $N = 1000$ es suficiente para obtener t_w con una exactitud de al menos un $\approx 0.05\%$.

3.2.2 Posición y evolución del corner layer

El corner layer se identifica fácilmente en un gráfico de $\partial_{xx}\eta$ a t fijo dado que aparece como un pico muy pronunciado. Dicho pico no aparece súbitamente sino que se desarrolla gradualmente a medida que t aumenta, a partir de una suave cresta que rápidamente crece en altura y reduce su ancho, al mismo tiempo que se desplaza hacia el frente; posteriormente, en tanto t crece el

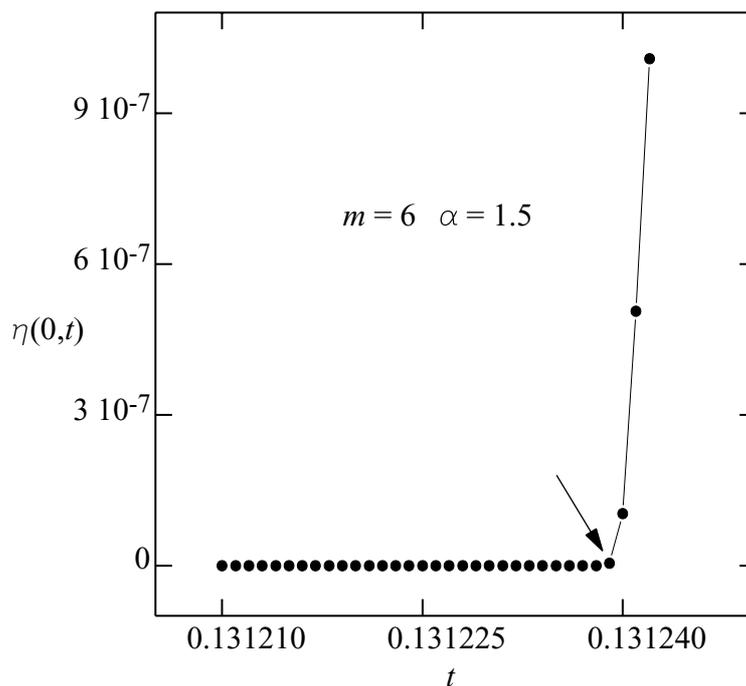


Figura 3.4: Ver la leyenda de la figura 3.1.

corner layer sigue moviéndose hacia el frente que espera y se refuerza (es decir, el pico de $\partial_{xx}\eta$ se hace más alto y más angosto).

Para describir cuantitativamente el movimiento y la evolución del corner layer es útil introducir algunas definiciones (arbitrarias). Definimos su *posición* $x_c(t)$ como el lugar donde $\partial_{xx}\eta$ es máximo, su *ancho* $\Delta x_c(t)$ como el ancho del pico de $\partial_{xx}\eta$ a la mitad de su altura (es decir, $\Delta x_c = x_r - x_l$ donde x_r y x_l son los puntos a la derecha y a la izquierda de x_c tal que $\partial_{xx}\eta(x_r) = \partial_{xx}\eta(x_l) = \partial_{xx}\eta(x_c)/2$), y su *intensidad* como $\Psi(t) = \partial_{xx}\eta(x_c)/\Delta x_c$. Para comparar la evolución del corner layer para diferentes m y α definimos su *intensidad normalizada* como $\Pi(t) = \Psi(t)/\Psi(-t_w)$. La figura 3.6 muestra un esquema que ayudará al lector a entender algunas de estas definiciones.

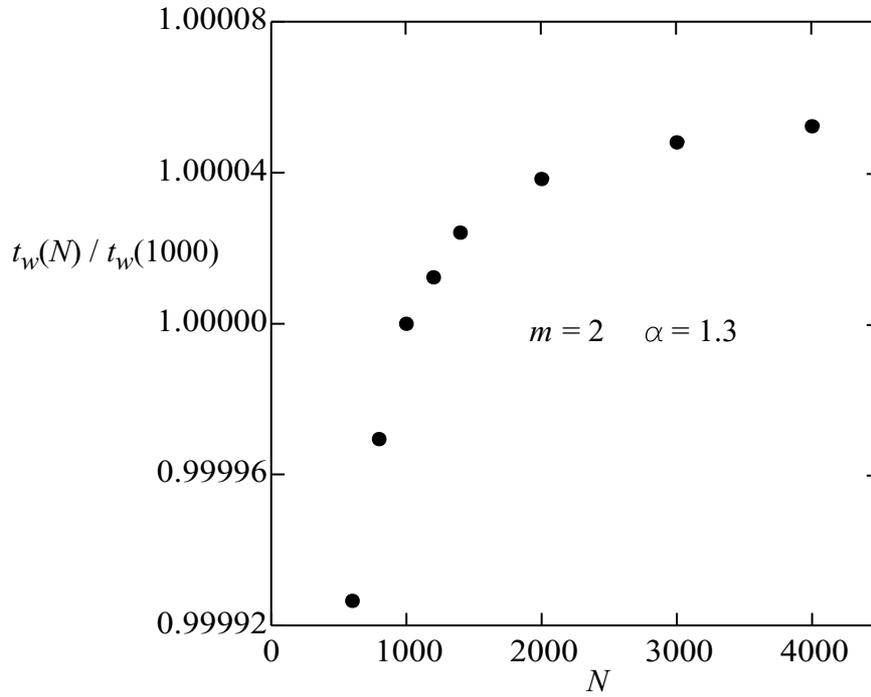


Figura 3.5: El cociente $t_w(N)/t_w(N = 1000)$ para diferentes valores de N ($m = 2$, $\alpha = 1.3$).

Si bien la formación de un corner layer es un proceso gradual, para cuantificar los aspectos del mismo conviene definir t_c , el *tiempo de formación* del corner layer, como el tiempo en que Π excede un umbral (que por convención adoptamos como 100) y el *lugar de formación* como $x_c(t_c)$.

Notemos que para una solución autosemejante resulta $\Psi(t) \sim t^{-(\delta+1)}$, de modo que se podría esperar que estudiando la evolución de Ψ podríamos establecer si el comportamiento del corner layer es autosemejante y determinar el correspondiente δ . Desafortunadamente esto no es posible, ya que antes de alcanzar cualquier asintótica autosemejante el ancho del corner layer de la solución numérica resulta igual al espaciamiento de la grilla de manera que

Tabla 3.1: Valor numérico y teórico de t_∞ para diferentes valores de m .

m	t_∞	
	Numérico	Teórico
1/2	0.073025	0.073030
1	0.111108	0.111111
2	0.154200	0.154213
3	0.178634	0.178644
4	0.194462	0.194519
6	0.213891	0.213998
9	0.229583	0.229685

el verdadero Δx_c no se puede determinar.

3.2.3 Determinación de las asintóticas

Se pueden usar varios métodos para diagnosticar la aparición de una asintótica autosemejante (ver Gratton y Vigo 1998). En este trabajo hemos usado el método del perfil al momento de arranque y el método de comparación con soluciones autosemejantes, que describiremos a continuación.

Método del perfil al momento de arranque

Este método se basa en el hecho que a $t = 0$ todas las soluciones autosemejantes de (1.1) toman la forma $\eta \propto x^{2-1/\delta}$, gracias a lo cual una asintótica autosemejante se representa por medio de una línea recta en un gráfico

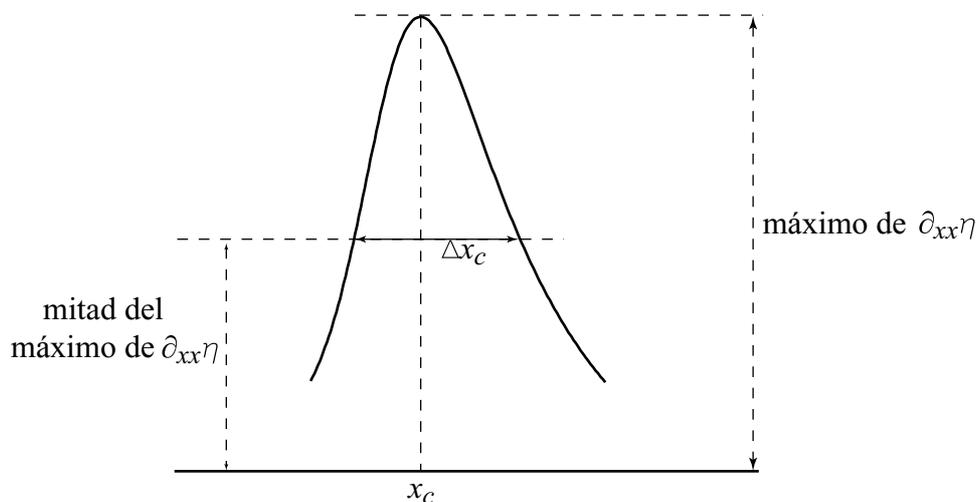


Figura 3.6: Gráfico cualitativo del pico de $\partial_{xx}\eta$ a un t fijo.

$\log(\eta(x, 0)/x)$ vs. $\log(x)$. Luego, a partir de tales gráficos podemos determinar los dominios que estas asintóticas ocupan al momento del arranque. Una asintótica del tipo LOT aparecerá como una recta no horizontal cuya pendiente es $s = 1 - 1/\delta$. Determinamos s realizando un ajuste por cuadrados mínimos de los 50 puntos de grilla con el mayor coeficiente de correlación, y a partir de s obtenemos δ (en verdad δ resulta poco sensible a la cantidad de puntos utilizados para hacer el ajuste: usando 25, 75 y 100 encontramos diferencias de 0.25% o menores). Una recta horizontal señala la presencia de una asintótica del tipo onda viajera. La figura 3.7 permite al lector visualizar este método.

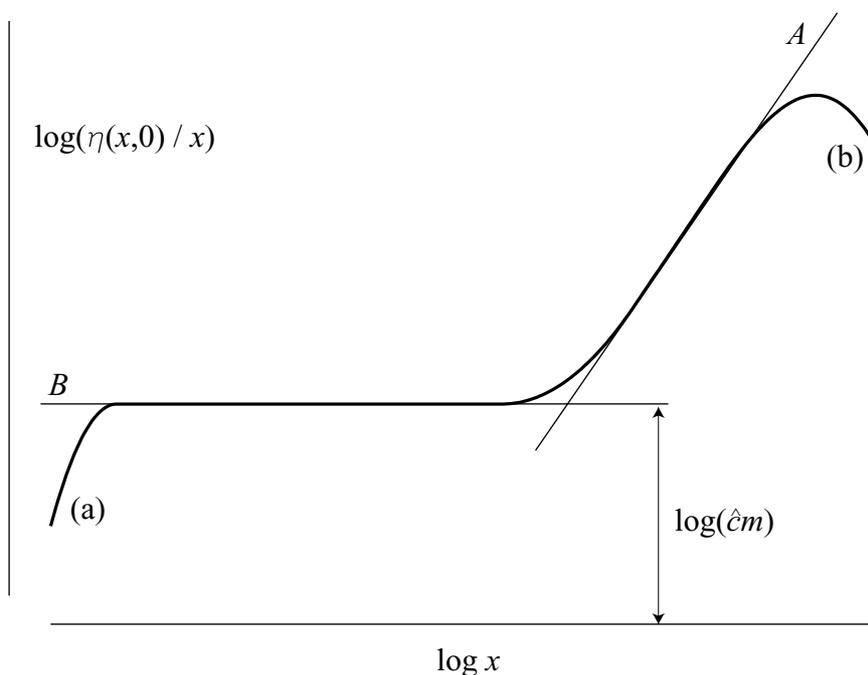


Figura 3.7: Determinación de las asintóticas al momento del arranque. En la región donde el gráfico de $\log(\eta/x)$ vs. $\log x$ coincide con la recta A hay un régimen asintótico del tipo LOT. El correspondiente exponente de autosemejanza δ se obtiene a partir de la pendiente de esta recta. Donde el gráfico coincide con la recta horizontal B la autosemejanza es del tipo onda viajera. De la ordenada de esta recta se obtiene la velocidad \hat{c} de arranque del frente. Este gráfico cualitativo es representativo de los correspondientes gráficos obtenidos a partir de nuestras soluciones numéricas. La región de dicho gráfico indicada como (a) se aparta de la recta horizontal B gracias a que allí la resolución es pobre; la indicada como (b) se aparta de la recta A gracias a la proximidad de la pared.

Método de comparación con soluciones autosemejantes

Cualquier solución autosemejante $h(x, t) = \eta^{1/m}$ de (1.1) satisface la relación

$$h^m t/x^2 = \eta t/x^2 = Z(x/bt^\delta) = \tilde{Z}(x/t^\delta) \quad (3.10)$$

donde \tilde{Z} es una función que depende de δ y de el tipo de autosemejanza. Luego si la solución es autosemejante, un gráfico de $\eta t/x^2$ vs. x/t^δ lleva a la misma curva para cualquier t . Sacamos provecho de este hecho para hallar el dominio en cual la solución numérica se aproxima a la solución LOT e investigar de que modo dicho dominio varía con el tiempo. Con este propósito comparamos los gráficos de los valores numéricos de $\log(\eta_{num}/t^{2\delta-1})$ vs. $\log(x/t^\delta)$ para diferentes t con el gráfico de $\log(\eta_{LOT}/t^{2\delta-1})$ vs. $\log(x/t^\delta)$. Eligiendo un adecuado valor de δ es posible alcanzar una superposición precisa de los gráficos en el dominio donde la solución numérica es autosemejante.

Estas técnicas son poderosas herramientas para investigar el desarrollo de las asintóticas autosemejantes de las soluciones numéricas, pero deben ser aplicadas con cuidado para no caer en errores debidos a los efectos provenientes de la no uniformidad de la grilla. Esto se mostrará más adelante.

3.2.4 Determinación de la velocidad de arranque

Podemos determinar \hat{c} a partir de la relación

$$\log(\eta(x, 0)/x) = \log(m\hat{c}) \quad (3.11)$$

que vale a $t = 0+$ cerca de un frente que se mueve con velocidad finita y no nula \hat{c} , como puede ser verificado de (1.1) y también de (2.4). En este punto es necesario hacer un comentario. En muchos casos (usando $N = 1000$ y aún con $N = 4000$) no observamos (ver Section 4.4 más adelante) la recta horizontal en el gráfico $\log(\eta(x, 0)/x)$ vs. $\log(x)$ que indica un regimen asintótico del tipo onda viajera, por lo que se podría sospechar que el valor de \hat{c} obtenido gracias a (3.11) puede tener grandes errores. Sin embargo, resulta ser que en este caso, $\log(\eta(x, 0)/x)$ tiene una pendiente muy pequeña para pequeños x , de modo que en realidad el error de \hat{c} es suficientemente pequeño, aún en los casos en que no podemos hallar el dominio correspondiente a la asintótica del tipo onda viajera.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Propiedades generales de las soluciones numéricas

En las figuras 4.1-4.4, 4.5-4.8 y 4.9-4.12 mostramos los perfiles de η , $\partial_x\eta$ y $\partial_{xx}\eta$ respectivamente, para varios valores de m y $\alpha = 1.5$ a diferentes tiempos durante el período de espera. Para otros valores de α obtuvimos perfiles semejantes. Si bien la evolución de η para distintos m resulta similar, una observación cuidadosa nos revela ciertas diferencias. Notemos que el área debajo del perfil de η varía con el tiempo (excepto para $m = 1$), aumentando si $m < 1$ y disminuyendo si $m > 1$, dado que η (a diferencia de h) no es una cantidad que se conserva. Esto se puede entender escribiendo la ecuación (1.4) en la forma:

$$\partial_\tau\eta + \partial_x(-m\eta\partial_x\eta) = (1-m)(\partial_x\eta)^2 \quad (4.1)$$

Esta es una ecuación de continuidad, cuyo miembro derecho se comporta como una fuente si $m < 1$ y como un sumidero si $m > 1$.

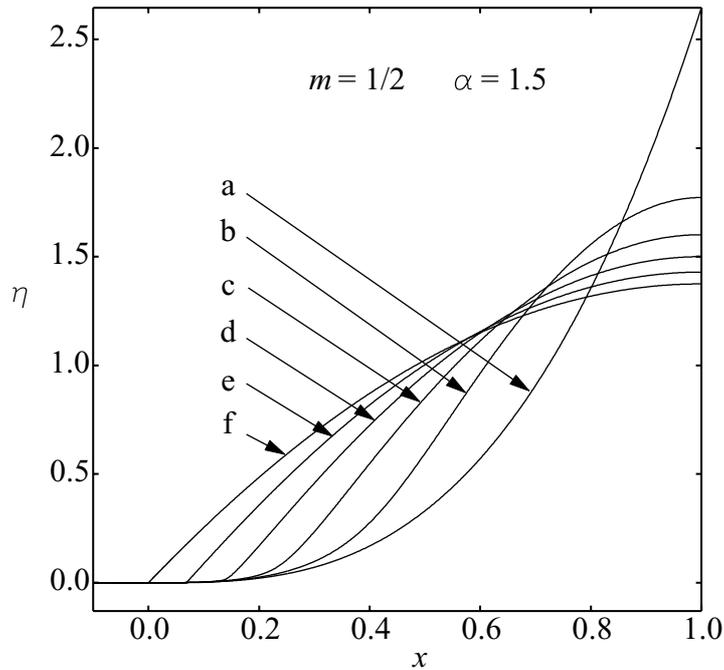


Figura 4.1: Perfiles de η durante el período de espera para $\alpha = 1.5$ y $m = 1/2$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

En estas figuras se pueden identificar tres regiones en las cuales los perfiles muestran diferentes comportamientos. De izquierda a derecha se encuentra una región cerca del frente que espera y que lo incluye, cuyo tamaño disminuye con el tiempo, en la que el perfil inicial permanece casi inalterado (los cambios que ocurren son tan pequeños que no se pueden apreciar en los gráficos). Luego se encuentra una segunda región, estrecha, a la que llamaremos de transición, en la cual las primeras y segundas derivadas sufren

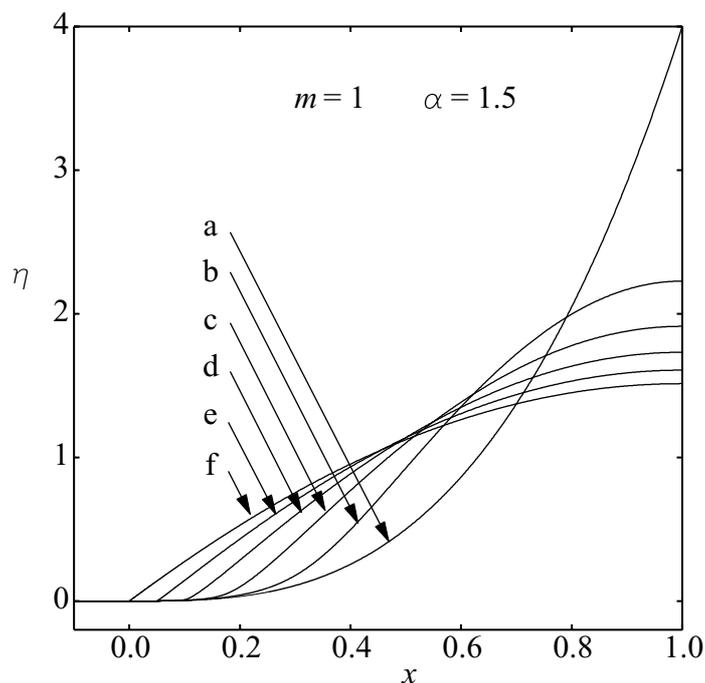


Figura 4.2: Perfiles de η durante el período de espera para $\alpha = 1.5$ y $m = 1$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

cambios muy fuertes (ver figuras 4.5-4.8 y 4.9-4.12). Finalmente hay una tercera región, que llega hasta $x = 1$ y cuyo tamaño aumenta con el tiempo, donde el perfil difiere fuertemente del inicial. La región de transición se puede definir como el lugar donde se localiza el pico de $\partial_{xx}\eta$; dicha región se mueve hacia el frente que espera mientras su ancho disminuye hasta anularse al momento del arranque del frente. Durante este proceso, el pico de $\partial_{xx}\eta$ evoluciona tendiendo a convertirse en una delta de Dirac, proceso que culmina en $t = 0$ cuando el pico alcanza al frente (ver figuras 4.9-4.12). Hacia el final de la etapa de espera, la forma de la solución en la región de transición es la de un corner layer de intensidad creciente que, al llegar al

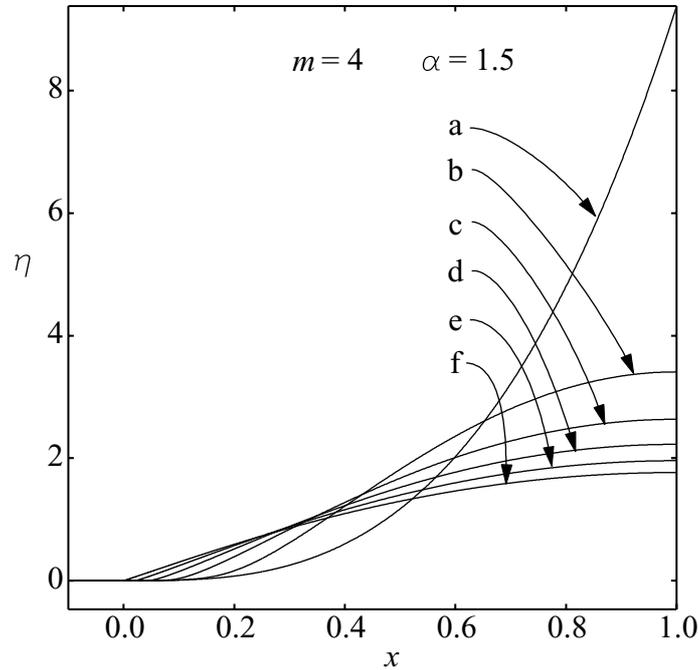


Figura 4.3: Perfiles de η durante el período de espera para $\alpha = 1.5$ y $m = 4$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

frente en $t = 0$, se convierte en un corner shock. El corner layer define la transición entre la primera región, donde el comportamiento está determinado por las propiedades locales del perfil inicial, y la tercera región, donde el comportamiento es determinado por las propiedades globales del perfil inicial. En todos los casos estudiados se formó sólo *un* corner layer. Veremos más adelante que en la segunda región y en parte de la tercera aparecen las asintóticas autosemejantes.

En la figura 4.13, donde mostramos los perfiles para $\alpha = 1.5$ y para todo m en $t = -0.2t_w$ y $t = 0$, se puede apreciar que el movimiento del corner layer depende de m . Por ejemplo, a $t = -0.2t_w$ el corner layer se halla más

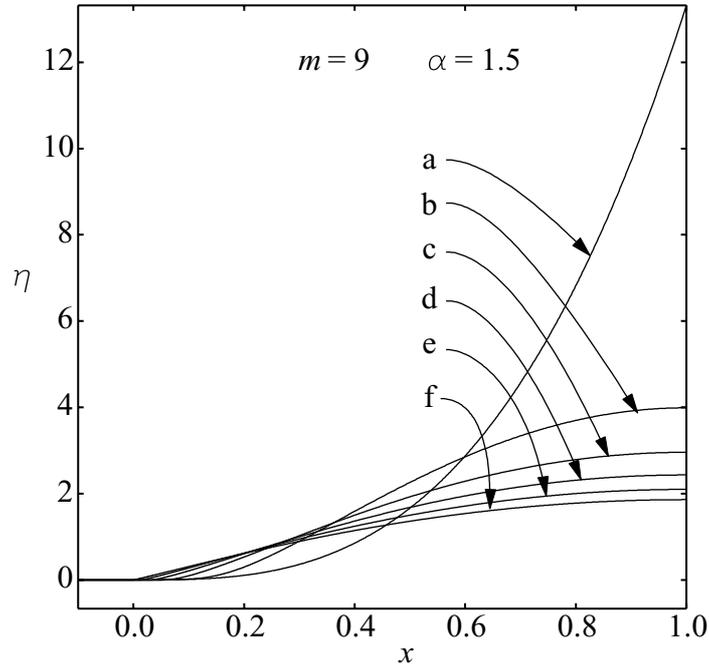


Figura 4.4: Perfiles de η durante el período de espera para $\alpha = 1.5$ y $m = 9$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

cerca del frente para m más grande. Por lo tanto, el corner layer se mueve más rápidamente cuando m es menor, porque debe recorrer una distancia mayor en un tiempo más breve (t_w crece con m a α fijo).

4.2 El tiempo de espera y la velocidad de arranque como funciones de α y m

Los valores numéricos de t_w obtenidos con nuestro código se han representado en la figura 4.14. Se puede observar que t_w es una función creciente tanto de

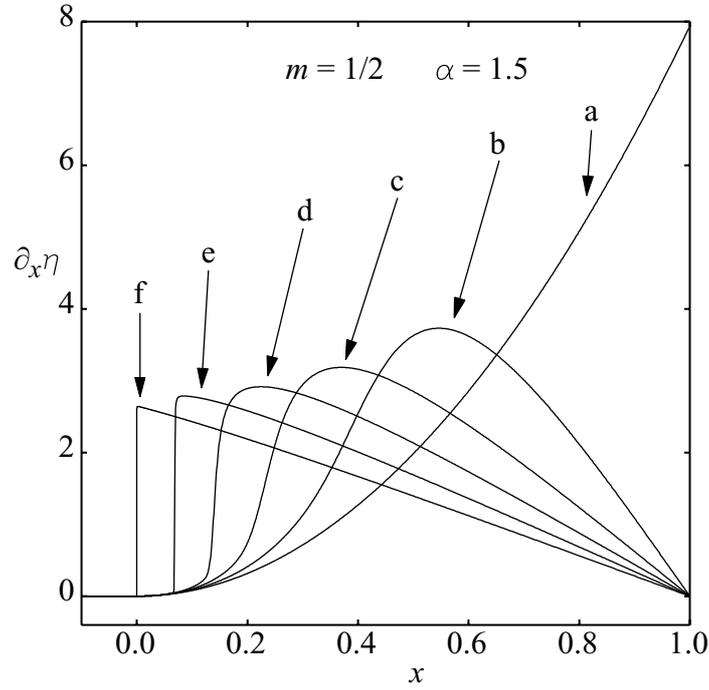


Figura 4.5: Gráficos de $\partial_x \eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 1/2$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

α como de m . Recordemos que la teoría predice cotas superiores e inferiores para t_w . La inferior corresponde a $\alpha = 1$ y está dada por $t_1(m)$ (2.12). La superior, que corresponde a $\alpha \rightarrow \infty$, es t_∞ y su expresión se da en la ecuación (2.22). Debido a que nuestra condición inicial (3.1) tiende a una delta de Dirac $\delta(x - 1)$ para $\alpha \rightarrow \infty$, resulta obvio que $t_w \rightarrow t_\infty$ en este límite. Para m fijo, a medida que α aumenta t_w se aproxima rápidamente a t_∞ (para $\alpha = 6$ ya es muy cercano al valor límite).

La velocidad inicial del frente $\hat{c}(m, \alpha)$ se muestra en la figura 4.15. Se puede ver que \hat{c} crece con α pero *decrece* con m . Para un dado m , la velocidad inicial del frente está comprendida entre la cota teórica inferior $\hat{c}_1(m)$

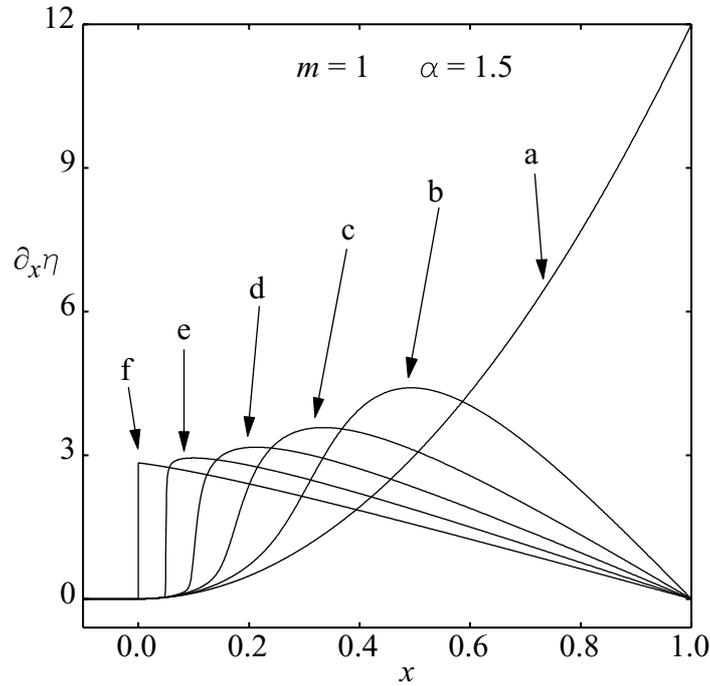


Figura 4.6: Gráficos de $\partial_x \eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 1$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

dada por (2.24) y una cota superior $\hat{c}_\infty(m)$ que corresponde a $\alpha \rightarrow \infty$, que se puede obtener a partir de la solución fundamental (2.1) y vale:

$$\hat{c}_\infty(m) = \dot{x}_f(t_\infty) = \frac{1}{(2+m)t_\infty} \quad (4.2)$$

Notemos que la cota inferior $\hat{c}_1(m)$ parecería ser el límite de $\hat{c}(m, \alpha)$ para $\alpha \rightarrow 1+$, y que excepto para α muy próximo a 1 no da una buena estimación de $\hat{c}(m, \alpha)$, ya que éste aumenta muy rápidamente con α , pues ya para $\alpha = 1.5$ es muy cercano a $\hat{c}_\infty(m)$, que es siempre *al menos* dos ordenes

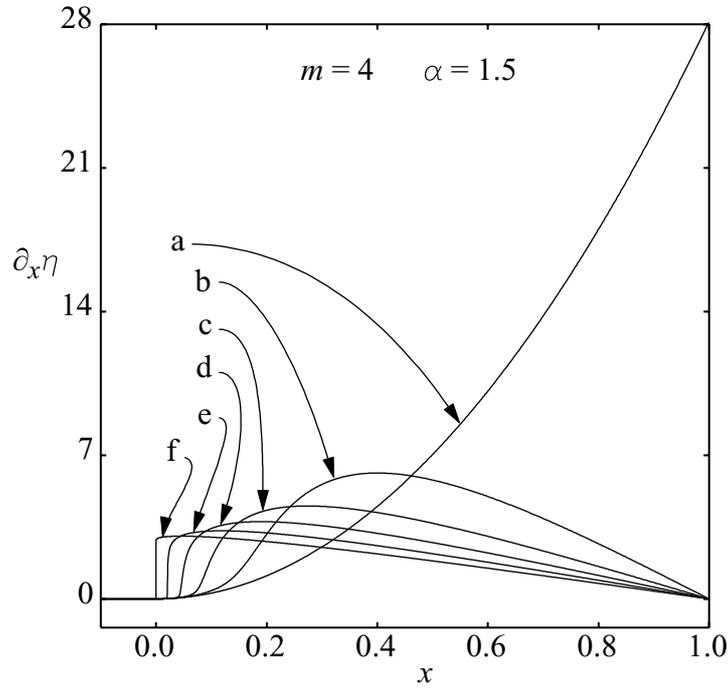


Figura 4.7: Gráficos de $\partial_x \eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 4$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

de magnitud mayor que $\hat{c}_1(m)$.

4.3 La evolución del corner layer

En la figura 4.16 mostramos el tiempo de formación del corner layer t_c (ver Sección 3.2.2). Sólo aceptamos como válido el valor de t_c si el umbral $\Pi = 100$ se obtiene con un Δx_c de al menos 10 puntos de grilla. Se puede apreciar que para un valor fijo de m , $|t_c|$ aumenta rápidamente con α , *i.e.* para α mayor el corner layer se desarrolla más cerca del comienzo del proceso; esto es razonable, ya que cuando $\alpha \rightarrow \infty$ la solución de nuestro problema de valores

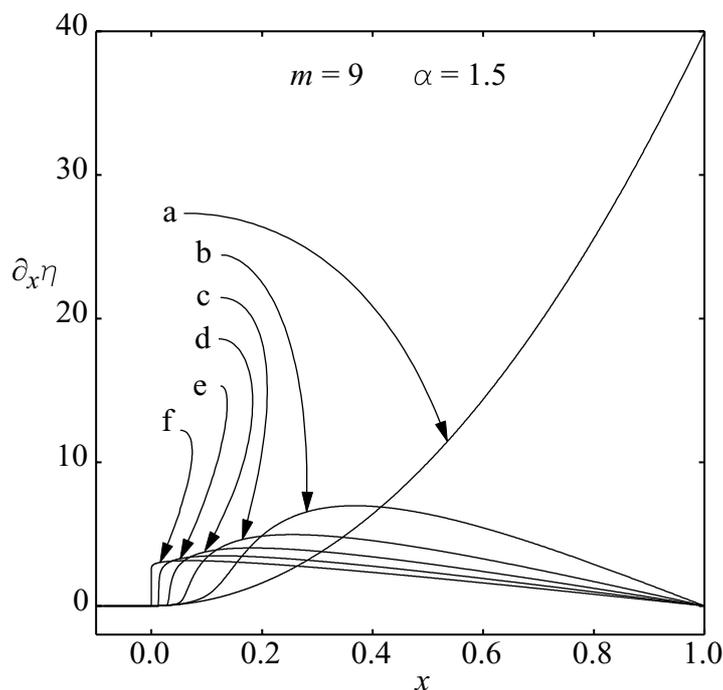


Figura 4.8: Gráficos de $\partial_x \eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 9$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

iniciales tiende a la solución fundamental (2.1). Para $\alpha \rightarrow 1$ el tiempo de formación se aproxima a $t = 0_-$. Por otra parte, $|t_c|$ aumenta con m para α fijo. En la figura 4.17 representamos t_c/t_w como una función de α , y podemos observar que este cociente depende débilmente de m .

El lugar de formación $x_c(t_c)$ se muestra en la figura 4.18. Se puede ver que a un dado m , $x_c(t_c)$ es una función creciente de α : en tanto α se aproxima a la unidad, el lugar de formación del corner layer se aproxima al frente que espera, y si $\alpha \rightarrow \infty$ el lugar de formación se acerca a la pared. El lugar de formación del corner layer depende bastante fuertemente de m : para un α fijo, el corner layer se forma más cerca del frente si m es más grande.

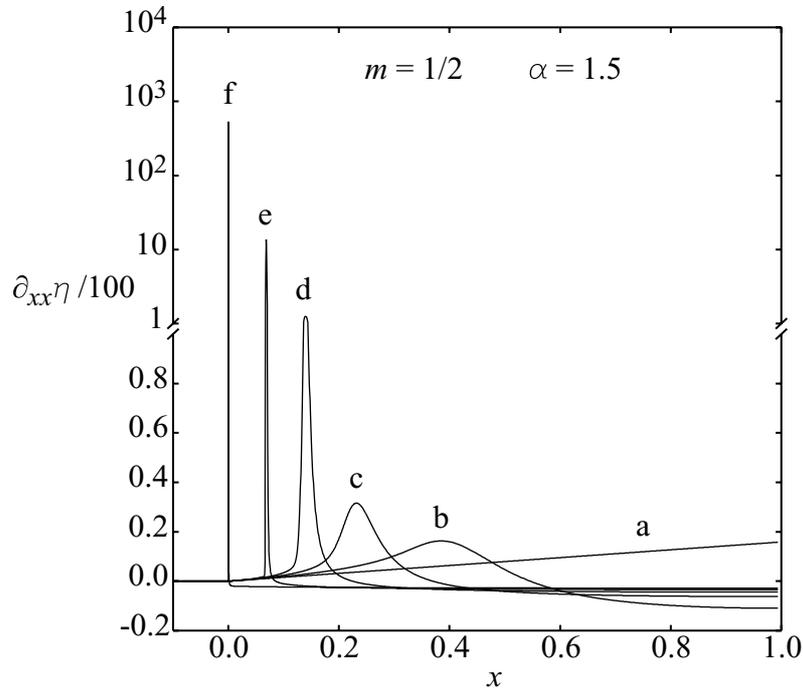


Figura 4.9: Perfiles de $\partial_{xx}\eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 1/2$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

Finalmente en la figura 4.19 graficamos $x_c(t_c)$ vs. t_c con el objeto de apreciar mejor la relación entre estas cantidades.

El movimiento del corner layer se puede apreciar en las figuras 4.20, 4.21 y 4.22, en las que representamos $x_c(t)$ y $\dot{x}_c(t)$ para $\alpha = 1.1, 1.5$ y 3 y $m = 1, 4$ y 9 . Se puede notar que, excepto para m grande y α pequeño, la velocidad del corner layer tiende a un valor constante a medida que éste se acerca al frente. Dicho valor coincide con la velocidad de arranque \hat{c} del frente obtenida como fue explicado en la Sección 3.2.4.

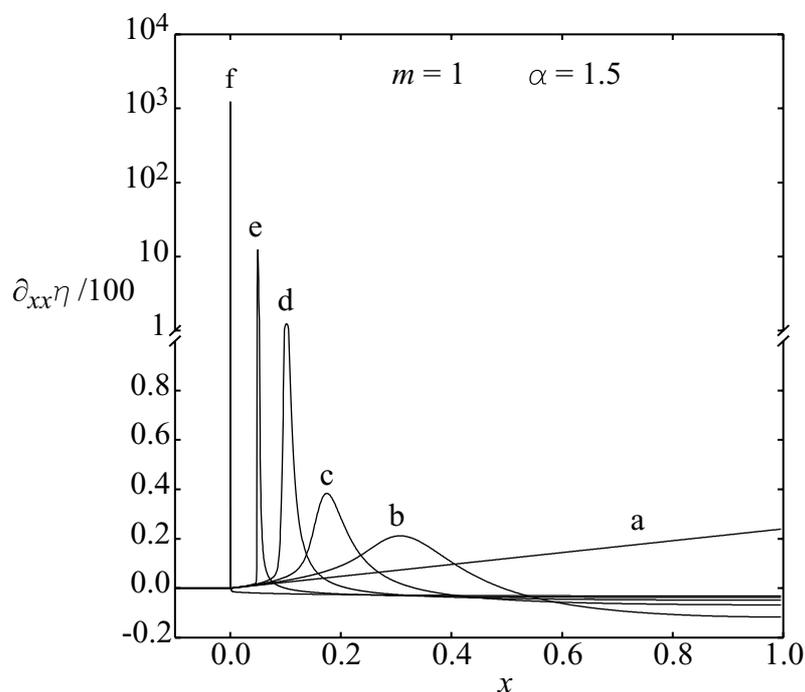


Figura 4.10: Perfiles de $\partial_{xx}\eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 1$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

4.4 El desarrollo de regímenes autosemejantes

Para algunos m y α aparecen en las soluciones numéricas *dos* regímenes autosemejantes que podemos identificar sin ambigüedades. El primero es una auto semejanza del tipo onda viajera. El segundo es del tipo LOT, y su exponente $\delta = \delta(m, \alpha)$ depende de las condiciones iniciales, como corresponde a una auto semejanza de Segunda Especie de acuerdo con la conjetura de Barenblatt y Zel'dovich. El dominio de la onda viajera yace alrededor del corner layer, y el dominio de la auto semejanza LOT se encuentra un poco atrás de este; entre ambos dominios autosemejantes existe un dominio donde la solución no es autosemejante.

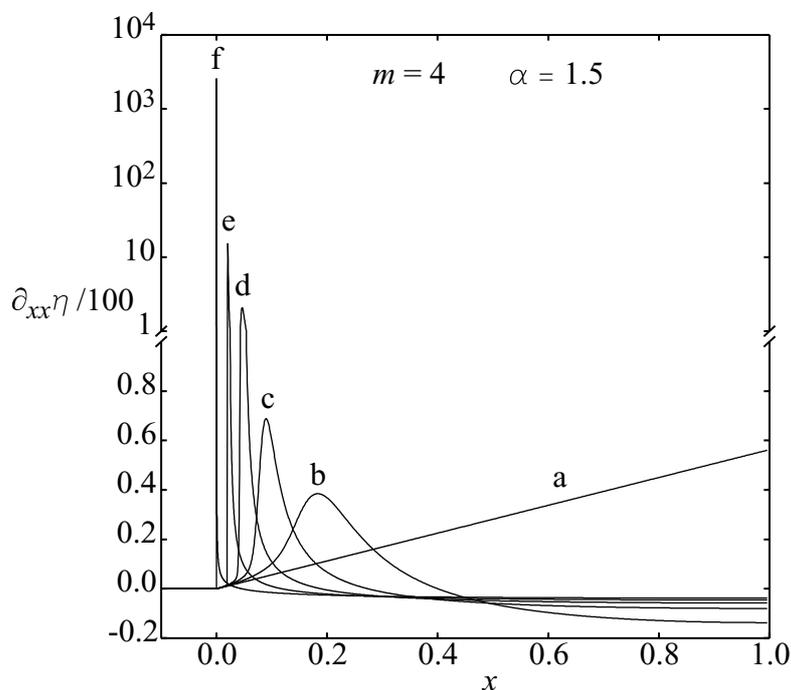


Figura 4.11: Perfiles de $\partial_{xx}\eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 4$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

En el resto de los casos observamos sólo un régimen autosemejante, que usualmente podemos identificar como del tipo LOT. Sin embargo esto no nos permite concluir que el otro régimen esté ausente: puede suceder que esté presente pero no logremos detectarlo debido a las limitaciones de nuestros cálculos numéricos. No es fácil detectar una asintótica autosemejante ni identificar sin dudas el tipo de autosemejanza de que se trata, particularmente cuando α es cercano a 1 o cuando α es grande.

Cuando α se aproxima a 1 el régimen asintótico de onda viajera se alcanza recién muy cerca del final de la etapa de espera, y en un dominio muy pequeño. Por este motivo para α menores que cierto α_{\min} no se logra ver la

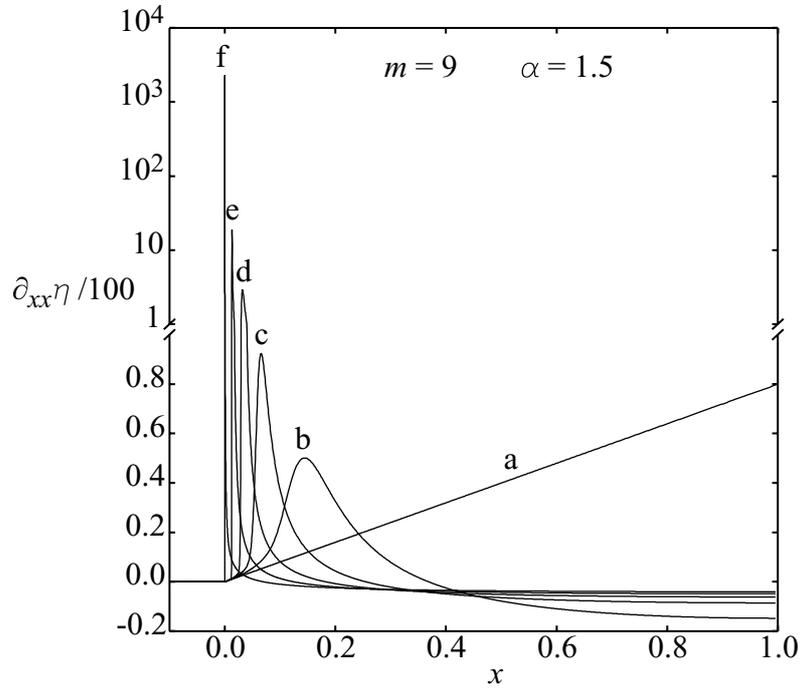


Figura 4.12: Perfiles de $\partial_{xx}\eta$ para $\alpha = 1.5$ y $m = 9$: (a) $t = -t_w$, (b) $t = -0.8t_w$, (c) $t = -0.6t_w$, (d) $t = -0.4t_w$, (e) $t = -0.2t_w$, (f) $t = 0$.

onda viajera y sólo se observa la asintótica del tipo LOT. Este problema es más severo para m grande. Usando un N mayor se puede obtener un α_{\min} más pequeño (ver Gratton y Vigo 1998), pero evidentemente no podemos usar un N arbitrariamente grande. Sin embargo, sabemos que la asintótica LOT no puede describir la solución hasta el frente mismo en el momento del arranque (ver Sección 2.3), de modo que es razonable asumir que en estos casos la asintótica del tipo onda viajera está también presente, aunque no la hayamos detectado.

Por otra parte, cuando α es grande la solución numérica desarrolla una asintótica LOT con δ muy próximo a 1; este problema es peor para m

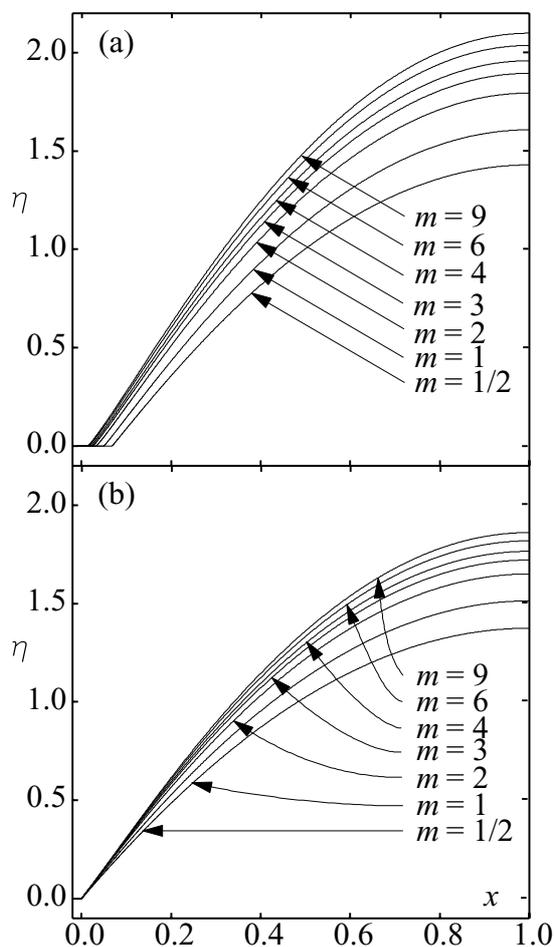


Figura 4.13: Perfiles de η para varios m y $\alpha = 1.5$ (a) $t = -0.2t_w$, (b) $t = 0$.

pequeño. En estos casos es imposible discriminar sin ambigüedades entre las asintóticas tipo LOT y la onda viajera, y nuevamente sólo podemos reconocer un tipo de autosemejanza. Igual que en el caso anterior, parece razonable asumir que en la solución existen ambos tipos de autosemejanza, pero que no logramos distinguir una de la otra. En resumen, los dominios en los que aparecen las asintóticas del tipo onda viajera y del tipo LOT dependen de α , m , y t . Para observar la asintótica del tipo onda viajera, especialmente para m grande y α cercano a 1, es necesario emplear una grilla muy fina,

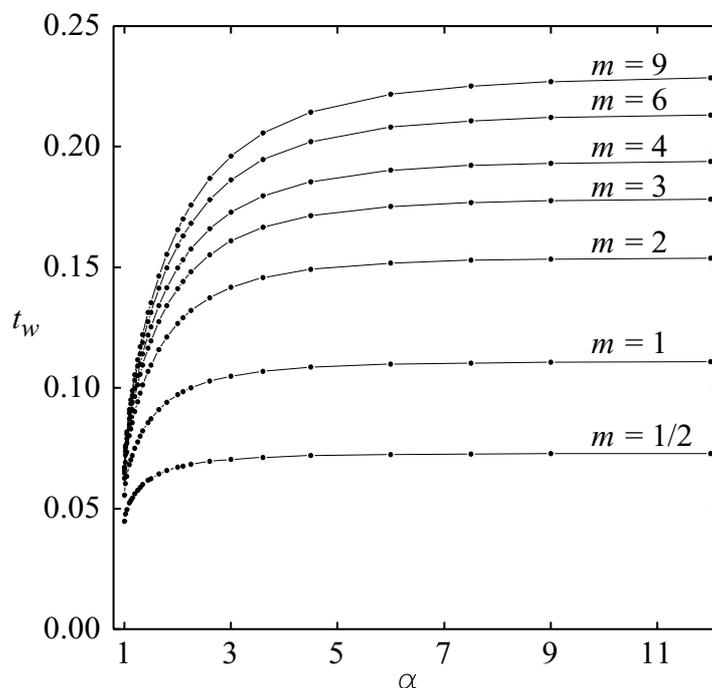


Figura 4.14: Valores del tiempo de espera para todos los valores de m y α considerados en este trabajo.

pero entonces el cálculo numérico consume mucho tiempo. Por ejemplo, con $\alpha = 1.1$ y $N = 4000$ sólo puede ser determinado para $m \lesssim 4$ (ver figuras. 4.23, 4.24, 4.25 y 4.26). A medida que $\alpha \rightarrow 1$, el dominio de la onda viajera se vuelve progresivamente más pequeño y se anula en el límite, mientras el dominio de la asintótica LOT se agranda. Por otra parte para α grande el régimen LOT tiene $\delta \cong 1$ (ver figura 4.27) tal que las asintóticas LOT y la onda viajera tienden a coincidir.

Algunos de los aspectos recién discutidos se pueden explicar por medio de un argumento cualitativo. La solución cerca y detrás del corner layer se aproxima a una onda viajera cuando el valor de η por delante es muy pequeño, *i. e.* cuando $\eta(x < x_c(t), t) \leq \varepsilon$ donde ε es una cantidad pequeña

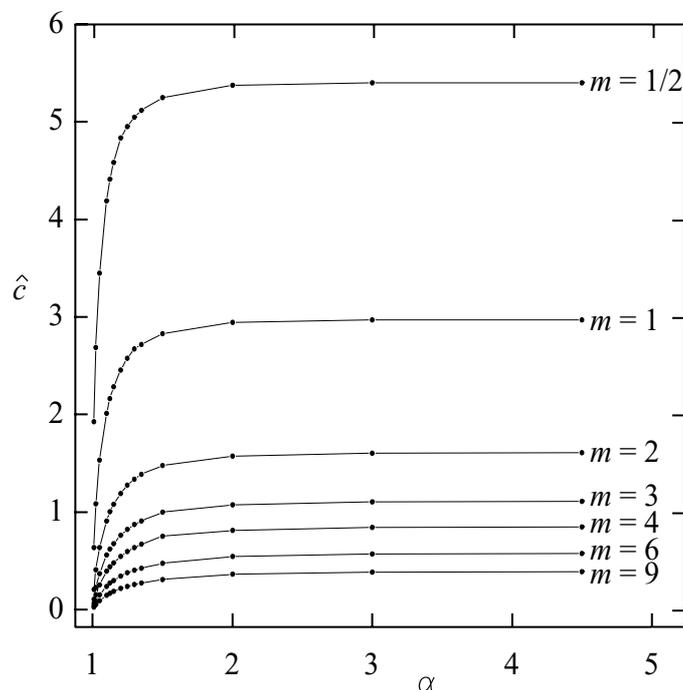


Figura 4.15: Velocidad del frente al momento de su arranque.

(la diferencia entre esta parte de la solución y la onda viajera será más pequeña a medida que ε sea menor). Para un cierto $\varepsilon = \varepsilon_0$ esta diferencia será tan pequeña que a los efectos prácticos podemos decir que la solución ha “alcanzado” la asintótica de onda viajera. Dado que el perfil en la región por delante del corner layer cambia muy lentamente, podemos con buena aproximación asumir que para $x < x_c(t)$ resulta $\eta(x, t) \simeq \eta(x, -t_w)$. Para calcular que tan cerca del frente debe estar el corner layer para mostrar el comportamiento de onda viajera ponemos $\eta(x, -t_w) \leq \varepsilon_0$ y luego usamos (3.1) con lo que hallamos la condición

$$x_c < x'_c = \left[\varepsilon_0 \left(\frac{2\alpha}{m} + 1 \right)^{-m} \right]^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (4.3)$$

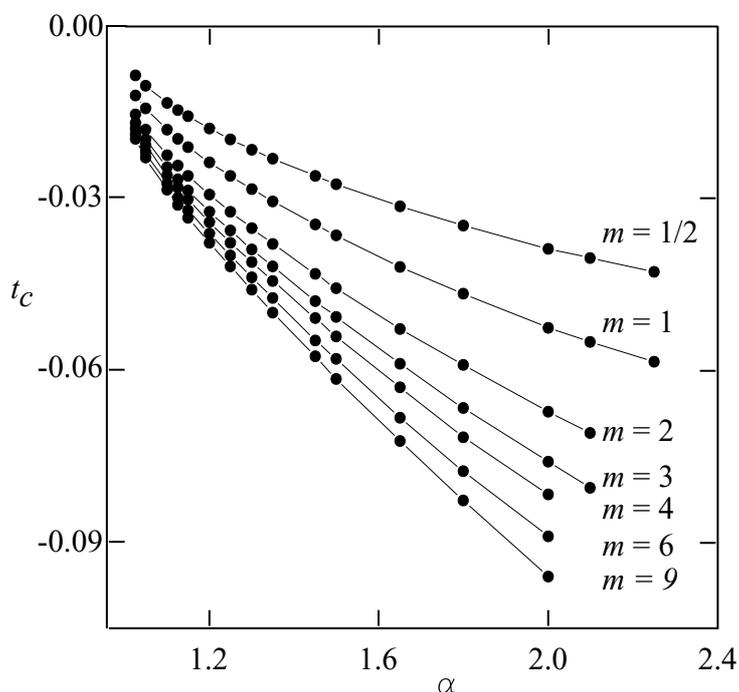


Figura 4.16: Tiempo de formación del corner layer.

Es fácil ver que la distancia máxima x'_c para la que el corner layer muestre el comportamiento de onda viajera aumenta con α y disminuye con m . Esto explica porqué la asintótica del tipo onda viajera es difícil de observar para α chico y m grande.

En la figura 4.27 (a) mostramos los valores de δ que corresponden al régimen autosemejante LOT (ver Sección 3). Se puede observar que δ es una función decreciente de α y que tiende muy rápidamente a 1, y más rápidamente aún a medida que m disminuye. Notemos que si $\delta_0 < \delta < \delta_+$ la asintótica es del tipo S. Luego para cada m , hay un valor crítico α_0 tal que, para $\alpha < \alpha_0$ obtenemos una autosemejanza LOT del tipo S, y para $\alpha > \alpha_0$

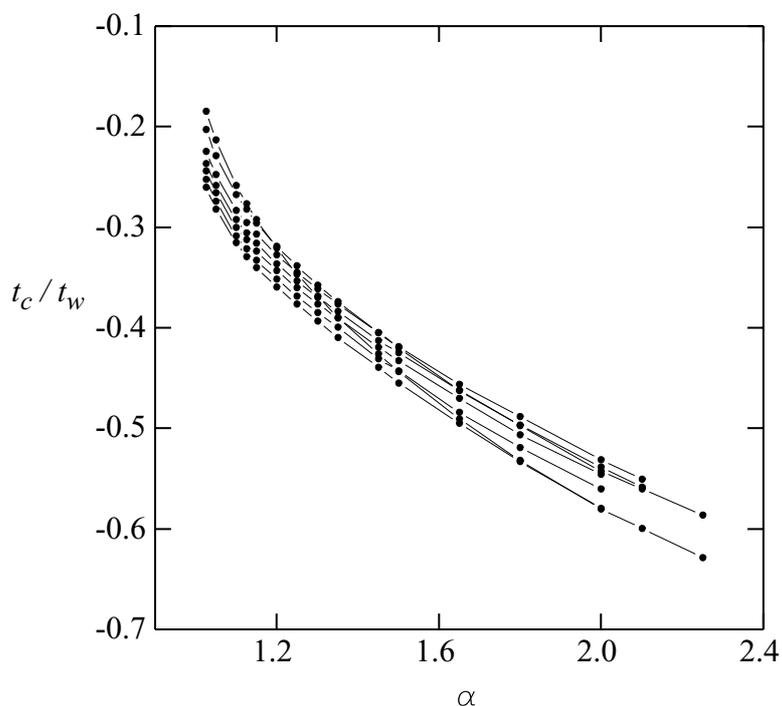


Figura 4.17: Cociente t_c/t_w .

una del tipo L. La mayor parte de las autosemejanzas LOT observadas en las soluciones numéricas son del tipo L, excepto para α próximo a 1 en cuyo caso fueron tipo S (Gratton y Vigo (1998) no detectaron soluciones tipo S debido a que no calcularon soluciones con α suficientemente pequeño). Nunca observamos asintóticas LOT del tipo N. Con el fin de apreciar mejor la manera en que δ depende de m y α es conveniente emplear una escala no lineal definida por $(\alpha - 1)^{1/3}$ y $(\delta - 1)^{1/3}$ (ver figura 4.27 (b)); de este modo las curvas para diferentes m tienden a ser rectas paralelas.

En las figuras 4.28, 4.29, 4.30 y 4.31 graficamos $\log(\eta/t^{2\delta-1})$ vs. $\log(x/t^\delta)$ para las soluciones numéricas con $\alpha = 1.1$ y $m = 1/2, 1, 4, 9$ a diferentes tiempos, y para la correspondiente solución LOT, con el objeto de mostrar

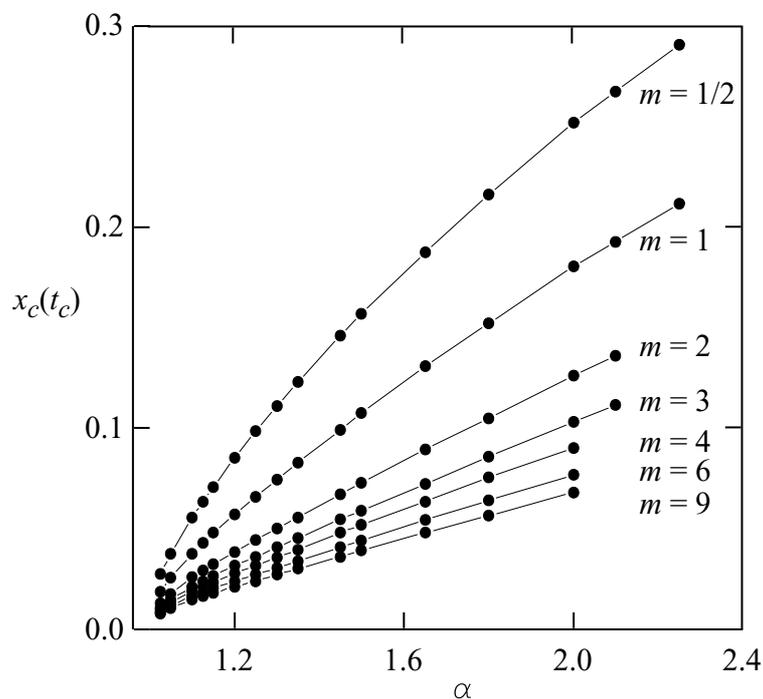


Figura 4.18: Lugar de formación del corner layer.

de que manera la solución numérica se aproxima a la solución LOT a medida que pasa el tiempo. Se puede observar que el dominio en el que la solución numérica coincide con la LOT se amplía con el tiempo (esto es así en la variable autosemejante ζ , en la variable física x es al revés), pero simultáneamente aumenta la diferencia entre estas soluciones y la solución LOT en la cercanía del corner layer, y esta diferencia es mayor para m grande. Para todos los tiempo considerados el dominio de la asintótica LOT abarca aproximadamente dos décadas.

En la figura 4.32 (a) comparamos la solución numérica para $m = 1$ y $\alpha = 1.2$ con la onda viajera (2.4) (con velocidad igual a la velocidad de arranque del frente de la solución numérica), para tres tiempos muy cercanos al final

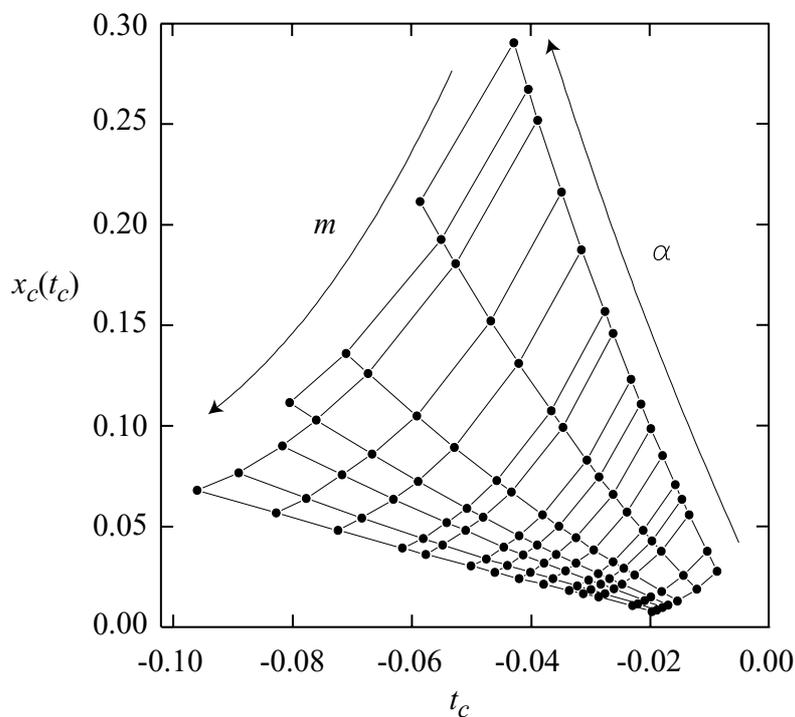


Figura 4.19: Lugar de formación del corner layer *vs* tiempo de formación del corner layer.

de la etapa de espera, y en la figura 4.32(b) comparamos la misma solución numérica para los mismos tiempos con las solución LOT η_L con el adecuado δ (determinado como fue explicado en la Sección 3.2.3). Se puede observar que en el intervalo $0 < \log(x/t) < 2$ la solución numérica muestra una asintótica onda viajera, mientras que en el intervalo $3 < \log(x/t^\delta) < 4$ muestra una asintótica LOT. Estos particulares valores de m y α fueron elegidos para mostrar claramente como coexisten los dos regímenes asintóticos en la misma solución.

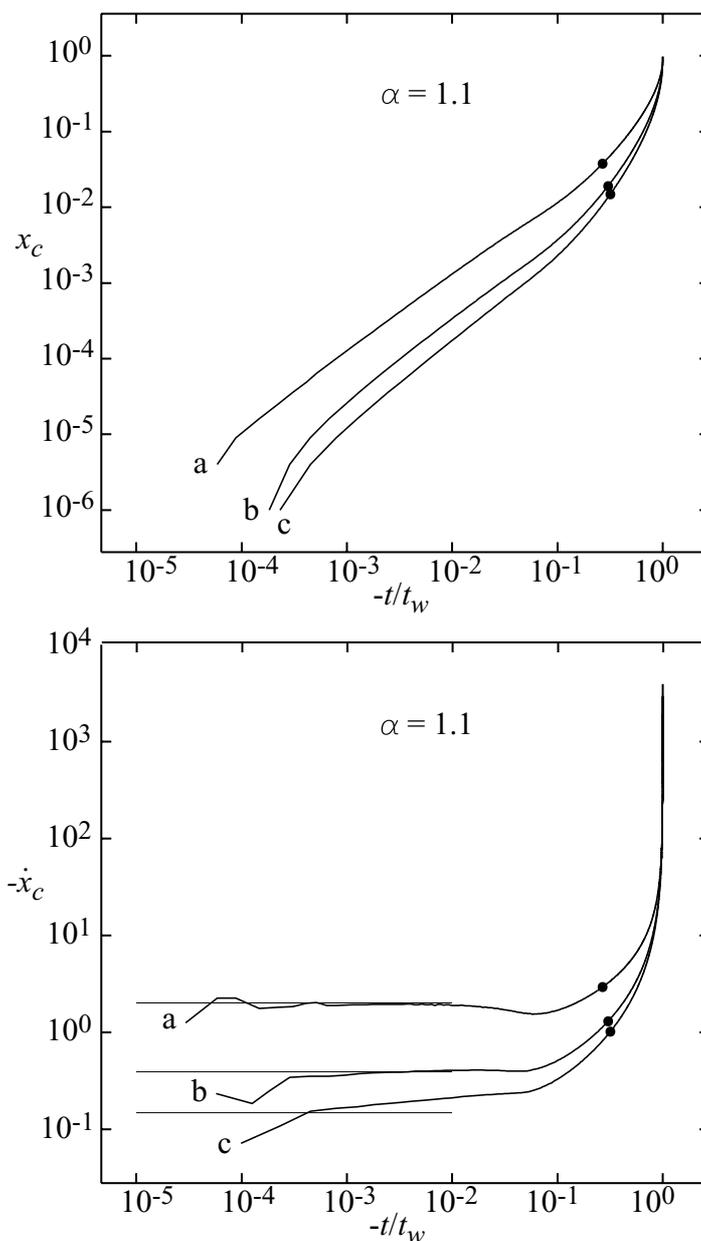


Figura 4.20: Posición x_c y velocidad $-\dot{x}_c$ de el corner layer para $\alpha = 1.1$. Las etiquetas sobre las curvas indican: (a) $m = 1$, (b) $m = 4$, (c) $m = 9$. El momento de formación es señalado por un punto sobre cada curva. En los gráficos de $-\dot{x}_c$ la línea horizontal indica el correspondiente valor de \hat{c} determinado tal como fuera explicado en la Sección 3.2.4.

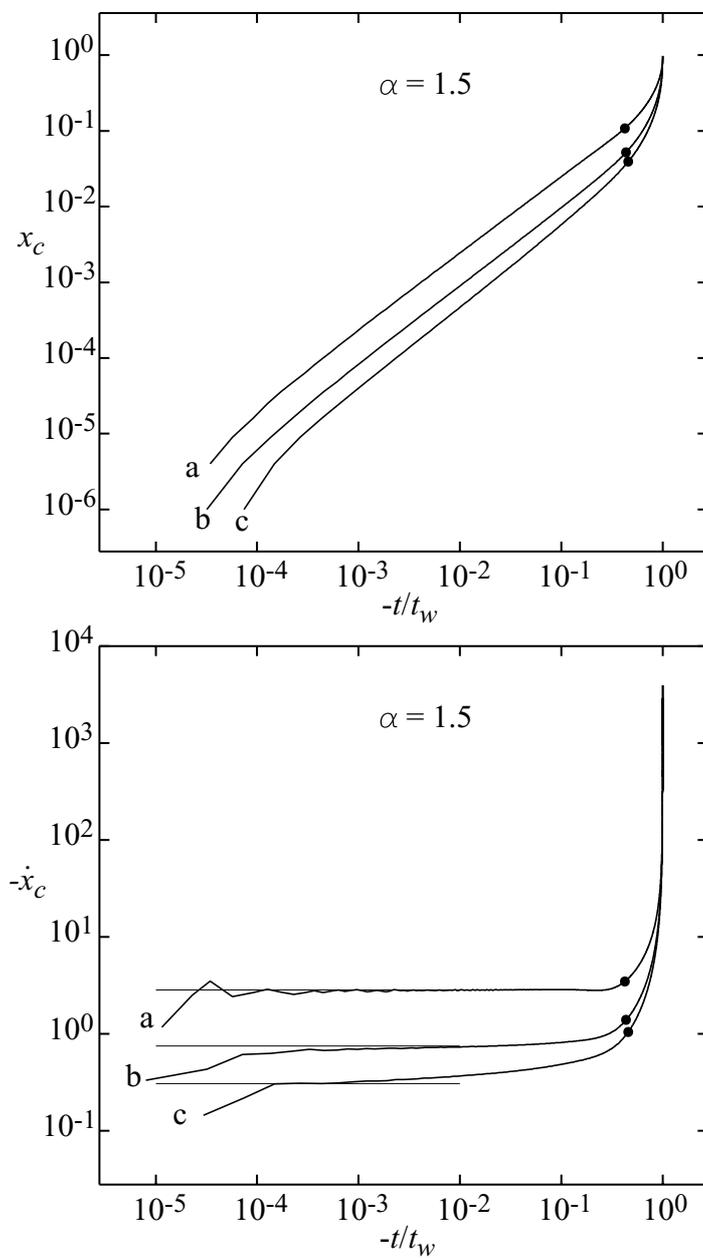


Figura 4.21: Posición x_c y velocidad $-\dot{x}_c$ de el corner layer para $\alpha = 1.5$. Ver leyenda de la figura 4.20.

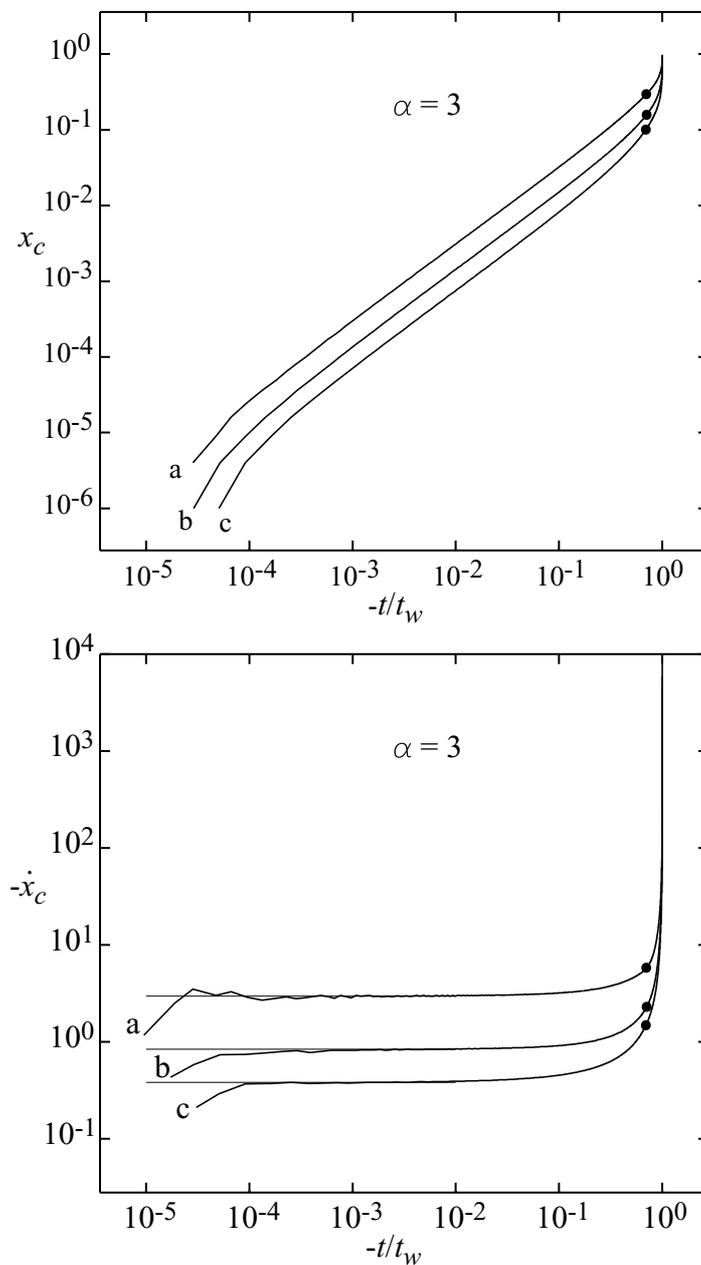


Figura 4.22: Posición x_c y velocidad $-\dot{x}_c$ de el corner layer para $\alpha = 3$. Ver leyenda de la figura 4.20.

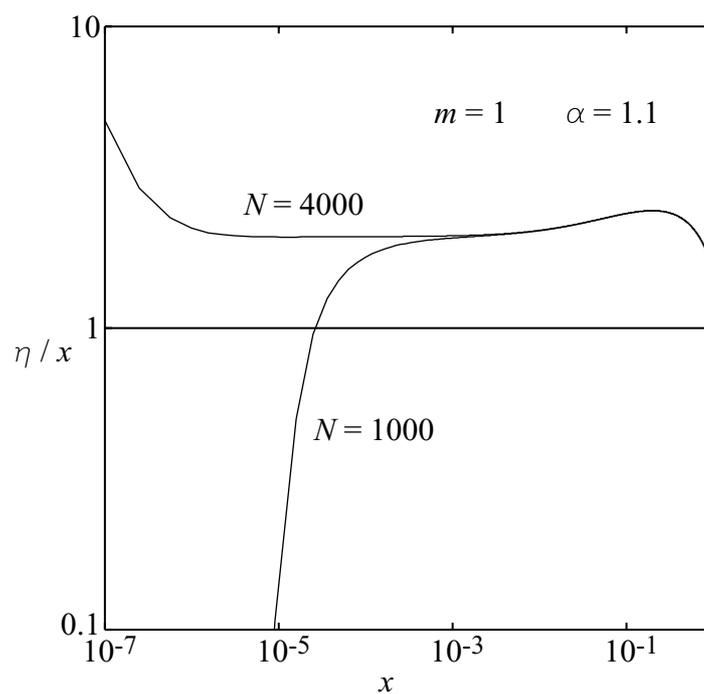


Figura 4.23: Dominios de las asintóticas del tipo onda viajera y del tipo LOT al momento del arranque del frente, para $\alpha = 1.1$ y $m = 1$. Notemos que la asintótica del tipo onda viajera no puede ser observada con $N = 1000$ pero sí con $N = 4000$.

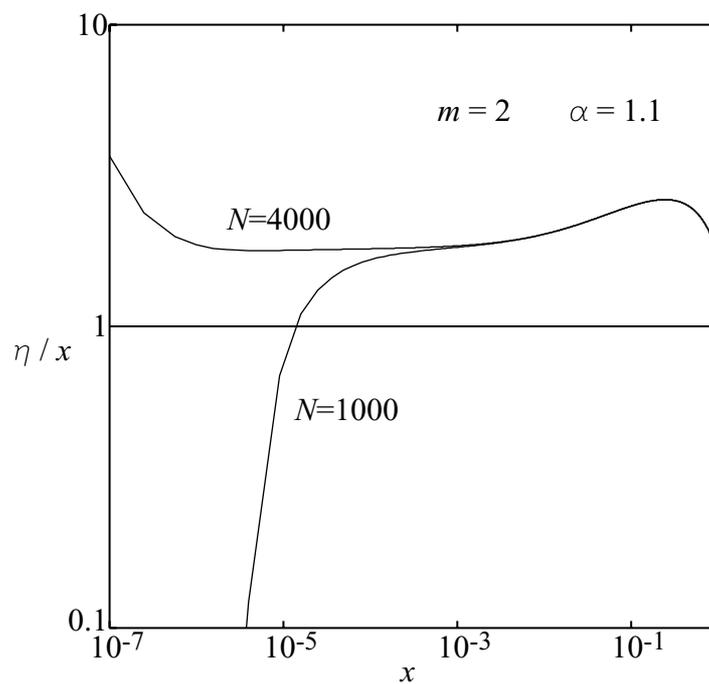


Figura 4.24: Dominios de las asintóticas del tipo onda viajera y del tipo LOT al momento del arranque del frente, para $\alpha = 1.1$ y $m = 2$. Ver leyenda de la figura 4.23.

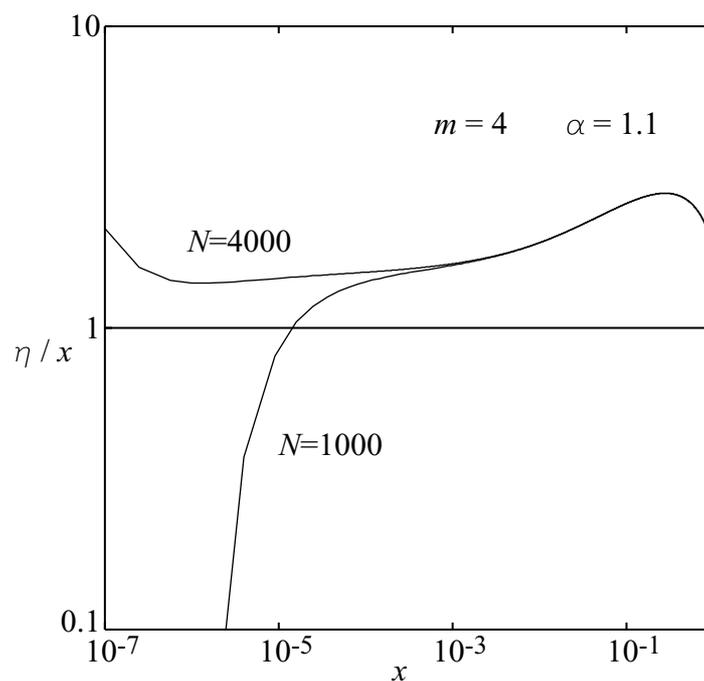


Figura 4.25: Dominios de las asintóticas del tipo onda viajera y del tipo LOT al momento del arranque del frente, para $\alpha = 1.1$ y $m = 4$. Notemos que la asintótica del tipo onda viajera no puede ser observada con $N = 1000$ ni con $N = 4000$.

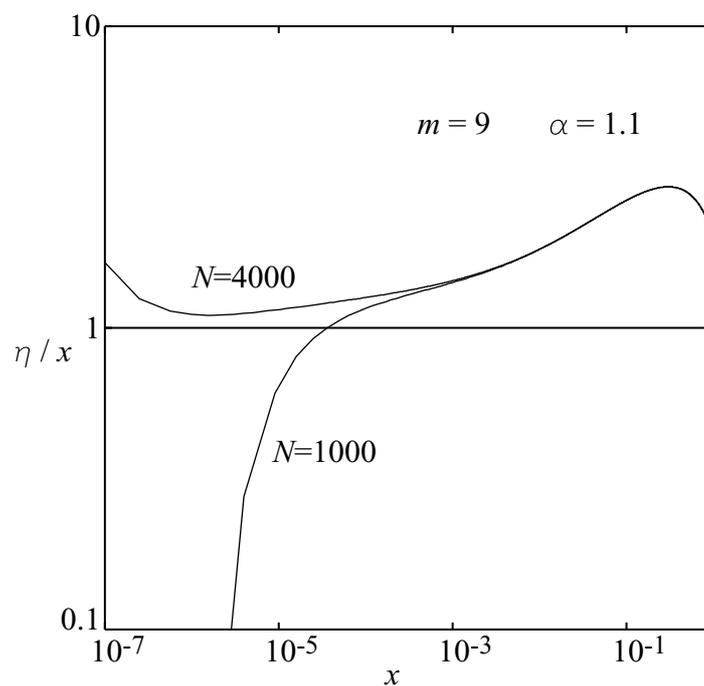


Figura 4.26: Dominios de las asintóticas del tipo onda viajera y del tipo LOT al momento del arranque del frente, para $\alpha = 1.1$ y $m = 9$. Ver leyenda de la figura 4.25.

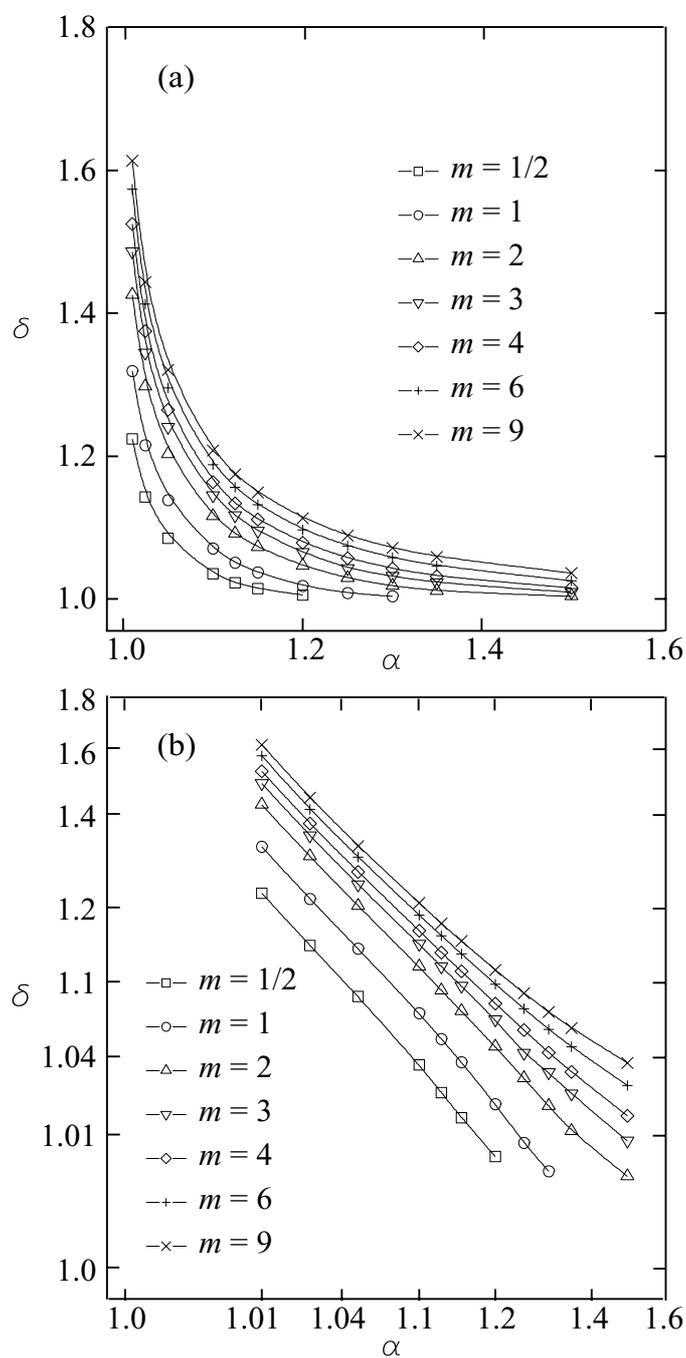


Figura 4.27: Exponentes de autosemejanza para las asintóticas LOT: (a) δ_{LOT} como función de α para diferentes m , (b) igual que en (a) pero con una escala no lineal para ambos ejes (ver el texto).

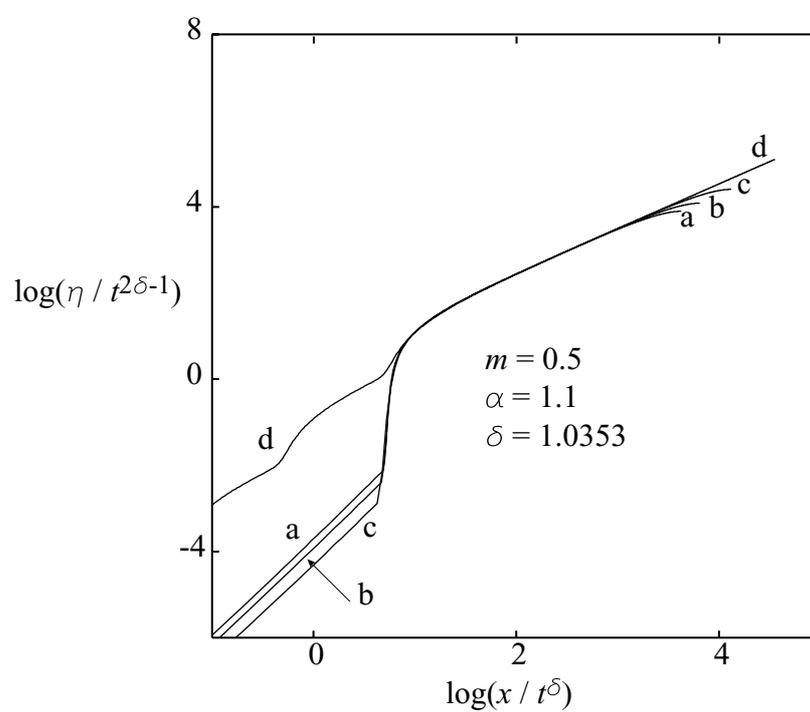


Figura 4.28: Comparación de la solución numérica para $\alpha = 1.1$ y $m = 1/2$ a diferentes tiempos (a) $t = -0.006t_w$, (b) $t = -0.004t_w$, (c) $t = -0.002t_w$ con (d) la solución LOT.

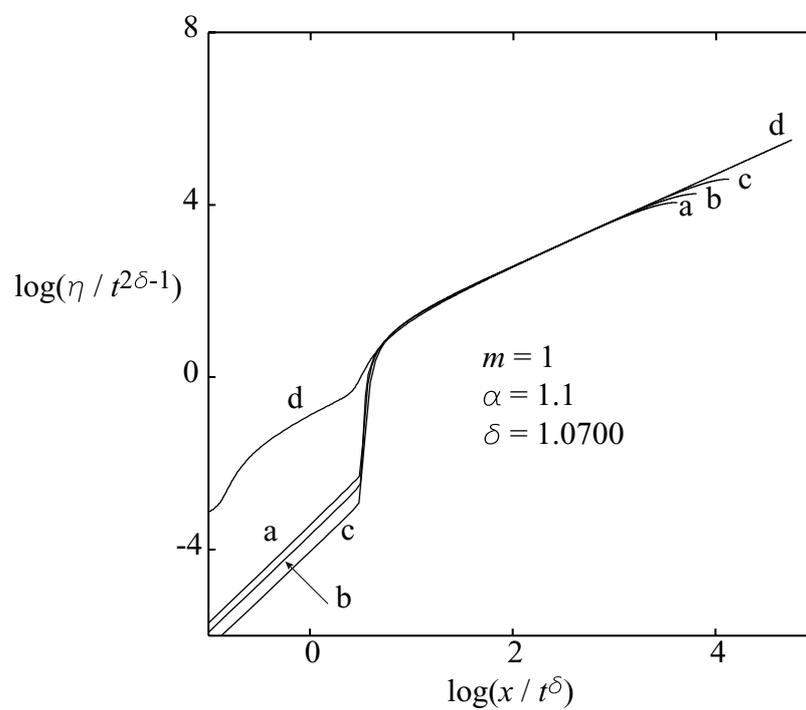


Figura 4.29: Comparación de la solución numérica para $\alpha = 1.1$ y $m = 1$ a diferentes tiempos (a) $t = -0.006t_w$, (b) $t = -0.004t_w$, (c) $t = -0.002t_w$ con (d) la solución LOT.

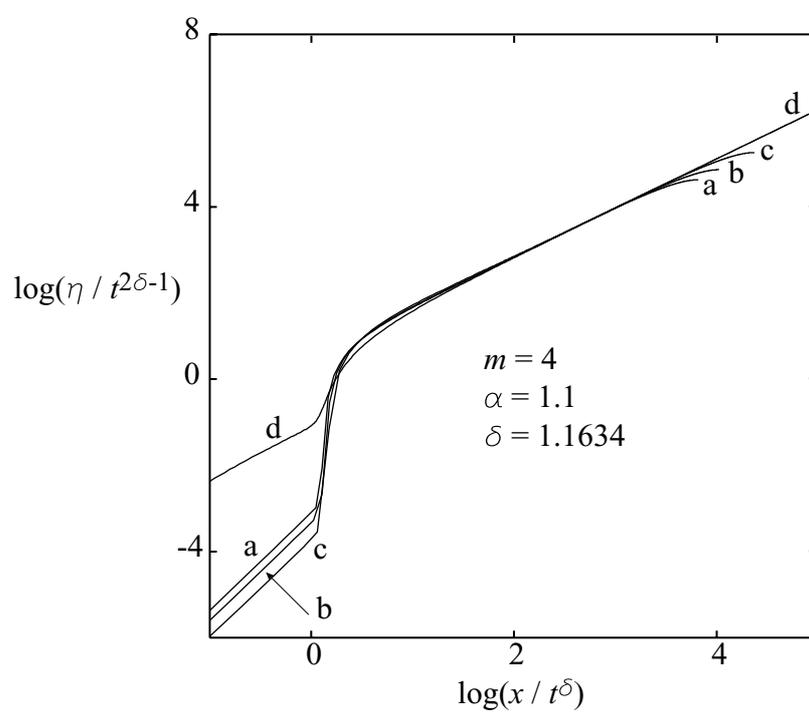


Figura 4.30: Comparación de la solución numérica para $\alpha = 1.1$ y $m = 4$ a diferentes tiempos (a) $t = -0.006t_w$, (b) $t = -0.004t_w$, (c) $t = -0.002t_w$ con (d) la solución LOT.

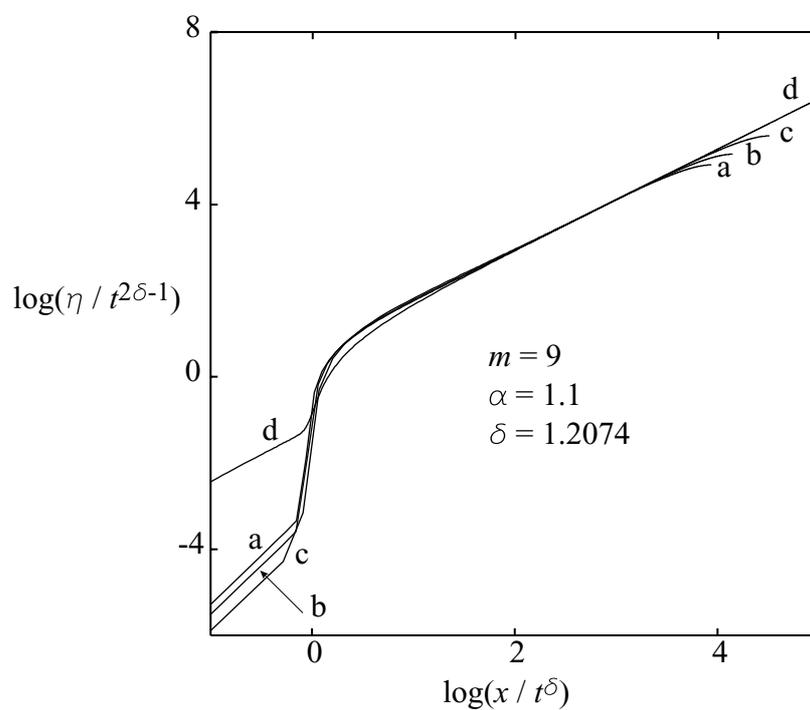


Figura 4.31: Comparación de la solución numérica para $\alpha = 1.1$ y $m = 9$ a diferentes tiempos (a) $t = -0.006t_w$, (b) $t = -0.004t_w$, (c) $t = -0.002t_w$ con (d) la solución LOT.

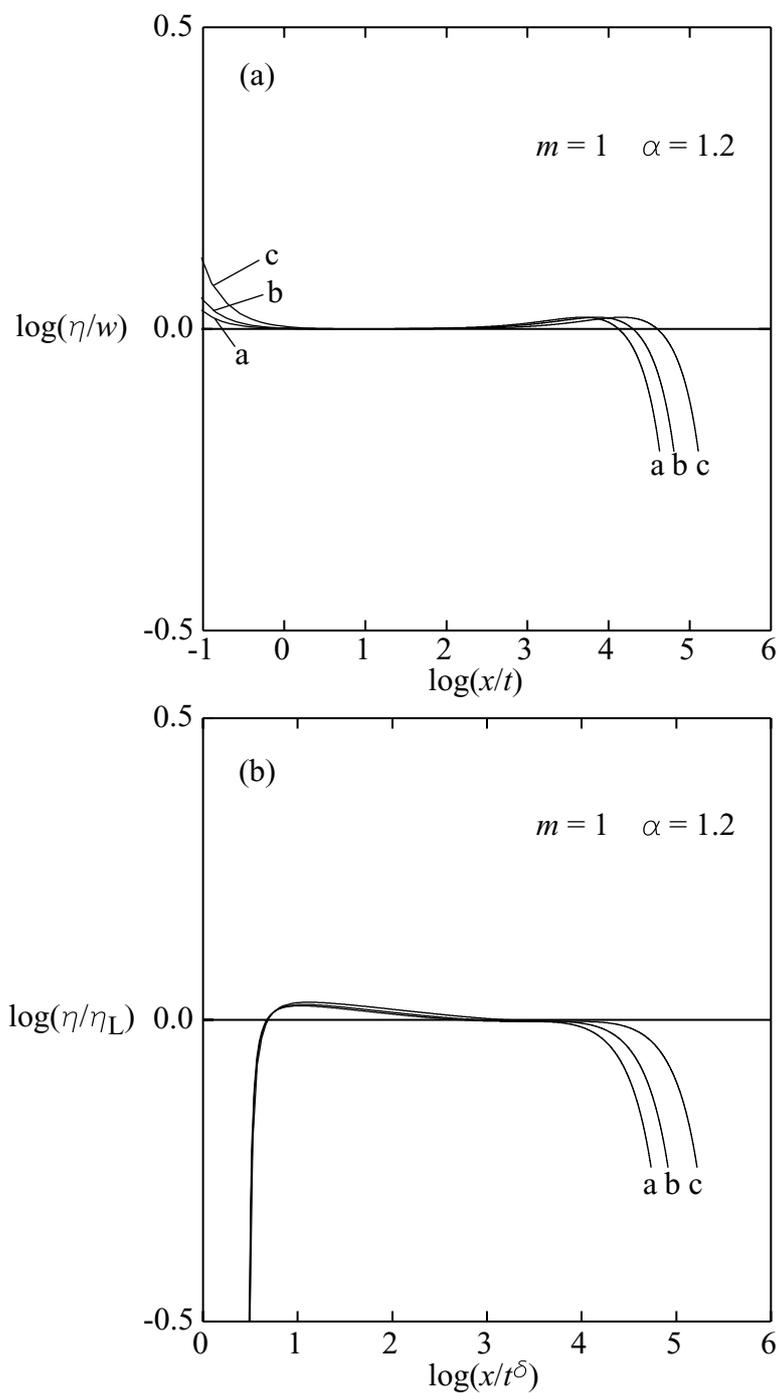


Figura 4.32: Comparación de la solución numérica (con $N = 4000$) con la solución onda viajera w en (a), y con la solución LOT η_L en (b). Las etiquetas a, b y c corresponden a $t = -0.0003t_w$, $t = -0.0002t_w$ y $t = -0.0001t_w$. El ejemplo corresponde a $\alpha = 1.2$ y $m = 1$.

4.5 Cotas y estimaciones del tiempo de espera para otras condiciones iniciales

Hasta aquí nuestra investigación se limitó a una clase particular de perfiles iniciales, y el lector se preguntará que es lo que ocurre en problemas que involucren condiciones iniciales más generales que (1.5). En relación a esto debemos señalar que los resultados de la Sección 4.2 se pueden usar en combinación con el Principio de Comparación Desplazada antes mencionado para hallar cotas superiores e inferiores de t_w . En efecto, si podemos encontrar α_1 y α_2 tal que para todo $x \in (-\infty, x_0]$ se cumple que

$$\int_{-\infty}^x g_{\alpha_1}(x)dx \leq \int_{-\infty}^x g(x)dx \leq \int_{-\infty}^x g_{\alpha_2}(x)dx \quad (4.4)$$

donde $g_{\alpha_1}(x)$ y $g_{\alpha_2}(x)$ son de la forma (1.5), entonces

$$t_{w1} \geq t_w \geq t_{w2} \quad (4.5)$$

Claramente, en tanto la cota (2.22) basada en la comparación con la solución fundamental sea más restrictiva que la cota superior (2.17) basada en la comparación con la solución singular, podremos seguramente encontrar una mejor cota superior con una elección adecuada de $g_{\alpha_1}(x)$ y $g_{\alpha_2}(x)$, ya que nuestro conjunto de comparación es más amplio que el usado por Vázquez (que corresponde a la elección especial $\alpha_2 = \infty$ en (4.4)). En el resto de los casos debemos comparar las cotas halladas por nuestro método con aquellas dadas por (2.17) para verificar si ellas son realmente una mejora.

4.5.1 Ejemplo de aplicación de nuestros resultados

Como un ejemplo de como aplicar nuestros resultados para obtener cotas del tiempo de espera mejores que las teóricas tomemos las condiciones iniciales

$$g(x) = \begin{cases} (1 - \theta) \sin^2(\frac{\pi}{2}x) + \theta \sin^4(\frac{\pi}{2}x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$. Este perfil inicial ha sido estudiado para poner a prueba las cotas teóricas (Aronson et al. 1983; Tomoeda y Mimura 1983; Aronson et al. 1985). Para contrastar nuestras cotas con las teóricas consideramos el caso $m = 1$. Veamos primero las cotas del tiempo de espera que la teoría nos provee.

Alrededor de $x = 0$ este perfil inicial se comporta de la siguiente manera

$$g(x) = \frac{\pi^2}{4}(1 - \theta)x^2 + \frac{\pi^4}{48}(4\theta - 1)x^4 + O(x^6) \quad (4.7)$$

Por lo tanto, para que se verifique la ecuación (2.15) debemos tomar $A = \frac{\pi^2}{4}(1 - \theta)$, y si $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$ debemos elegir $B = A$ para verificar la (2.16). De la ecuación (2.17) resulta entonces que

$$\text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{4} \implies t_w = \frac{2m}{\pi^2(m+2)(1-\theta)} \quad (4.8)$$

pero

$$\text{si } \frac{1}{4} < \theta \leq 1 \implies t_B \leq t_w \leq \frac{2m}{\pi^2(m+2)(1-\theta)} \quad (4.9)$$

Notemos que t_B se debe hallar numéricamente, y que la cota superior diverge cuando $\theta \rightarrow 1$.

La cota superior de Vázquez para el perfil inicial (4.6) depende de θ , dado que la masa M de este perfil es $M = (4 - \theta)/8$. Para $m = 1$ es $t_\infty = 1/9$, luego usando las propiedades de escala presentadas en la Sección 2.4, la cota superior de Vázquez resulta ser $8/9(4 - \theta)$.

Para el perfil (4.6), excepto para el caso especial $\theta = 1$, no podemos mejorar la cota inferior. Los resultados se presentan en la figura 4.33, donde mostramos los valores exactos de t_w obtenidos resolviendo el problema (1.1)-(4.6) con nuestro código, las cotas obtenidas a partir de las ecuaciones (2.17) y (2.22), y nuestras cotas superiores. Se puede ver que la cota superior obtenida por nosotros es más restrictiva que la dada por (2.17) para $\theta \gtrsim 0.55$, y es siempre mejor que (2.22) tal como fue anticipado. Para el caso especial $\theta = 1$ se puede obtener además una cota inferior que es aproximadamente un 50% más alta que la obtenida a partir de (2.17).

Los resultados de la figura 4.33 implican que para $\theta \gtrsim 0.55$, la condición inicial (4.33) lleva a soluciones en las cuales aparece un corner layer durante el período de espera, y en consecuencia t_w está determinado por el comportamiento global de (4.33). Además, encontramos que $t_w < t_A$ para $\theta \geq 0.4$, lo que también implica seguramente que t_w está determinado por el comportamiento global también en el intervalo $0.4 \leq \theta < 0.55$. Para valores menores de θ no pudimos determinar t_w con suficiente exactitud como para

compararlo con t_A . A pesar de esto, nuestros resultados nos llevan a conjeturar que el comportamiento global de (4.33) determina t_w para cualquier $\theta > 0.25$, ya que no vemos ninguna razón por la cual la tendencia observada podría cambiar para un θ intermedio, en tanto $t_B < t_A$. Debemos señalar que este era un asunto no aclarado y de interés teórico.

Como fue dicho previamente, cuando t_w está determinado por las propiedades globales del perfil inicial, el frente comienza a moverse con una velocidad no nula, ya que durante la etapa de espera se desarrolla un corner layer, y el arranque ocurre cuando éste alcanza al frente que espera. Hemos hallado la velocidad de arranque \hat{c} del frente a partir de las soluciones numéricas (ver figura 4.34), y verificado que esto es cierto para $\theta \geq 0.4$, y como una consecuencia de nuestra conjetura previa esperamos que lo mismo ocurra para cualquier $\theta > 0.25$.

- Valores exactos obtenidos numéricamente
- △— t_A : cota superior de Aronson
- ▽— t_B : cota inferior de Aronson
- t_∞ : cota de Vázquez
- ×— Cotas superiores obtenidas con funciones de la clase (1.5)
- × Cota inferior obtenida con funciones de la clase (1.5)

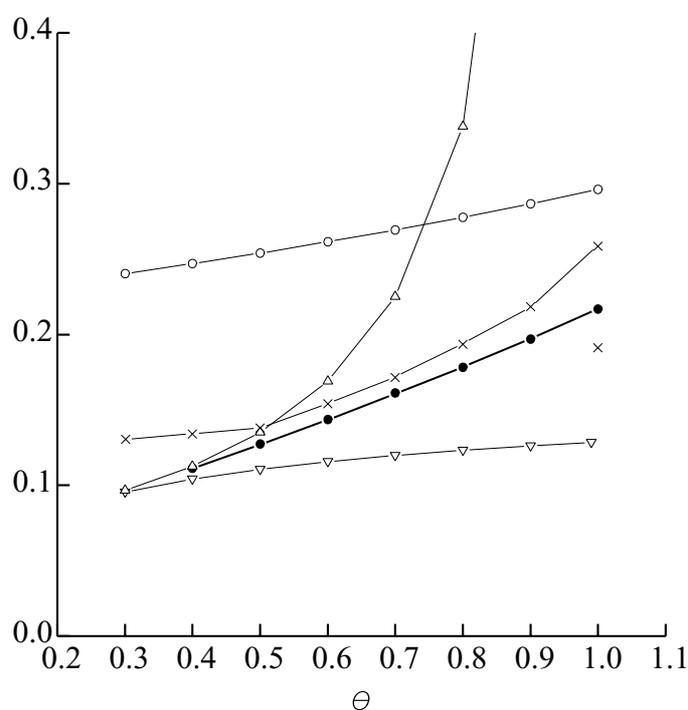


Figura 4.33: Tiempos de espera para la condición inicial (4.6), obtenidos con nuestro código numérico. Además se grafican las cotas t_A , t_B , t_∞ y las cotas derivadas a partir de funciones de la clase (1.5). Sólo se puede obtener una cota inferior numérica para el caso especial $\theta = 1$.

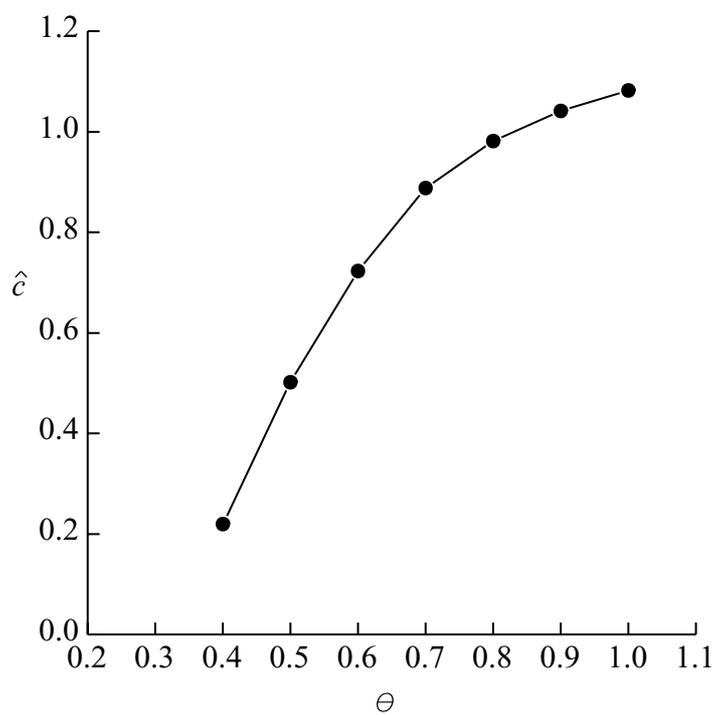


Figura 4.34: Velocidad de arranque del frente para el perfil inicial (4.6) en función de θ .

Capítulo 5

Discusiones y conclusiones

5.1 Eliminación aproximada de la dependencia en m

Los resultados que se muestran en la figura 4.14 sugieren que la mayor parte de la dependencia en m de t_w puede ser absorbida por medio de un adecuado reescalamiento. Con este propósito definimos un *tiempo de espera reducido* \mathcal{T} del siguiente modo

$$\mathcal{T}(m, \alpha) = \frac{t_w^{1/m}(m, \alpha) - t_1^{1/m}}{t_\infty^{1/m} - t_1^{1/m}} \quad (5.1)$$

En la figura 5.1(a) graficamos $\mathcal{T}(m, \alpha)$ y se puede observar que los puntos se disponen casi, pero no exactamente, sobre una única curva independientemente de m . Con el objeto de poder apreciar la dispersión que los puntos tienen alrededor de esa única curva, en la figura 5.1(b) graficamos los valores

de $\mathcal{T}(m, \alpha)/\bar{\mathcal{T}}(\alpha)$, donde $\bar{\mathcal{T}}(\alpha)$ es el promedio de $\mathcal{T}(m, \alpha)$ a α fijo. De dicha figura se desprende que, excepto para $\alpha \approx 1$, la dispersión de los puntos es menor de un 5%, y muestra tendencias sistemáticas, que no se pueden atribuir, por consiguiente, a los errores numéricos de la determinación de t_w .

De manera análoga podemos absorber la mayoría de la influencia que m tiene sobre $\hat{c}(m, \alpha)$ definiendo una *velocidad de arranque reducida* $\mathcal{C}(m, \alpha)$ por medio de

$$\mathcal{C}(m, \alpha) = \frac{\hat{c}^{1/m}(m, \alpha) - \hat{c}_1^{1/m}}{\hat{c}_\infty^{1/m} - \hat{c}_1^{1/m}} \quad (5.2)$$

El resultado de esta definición se muestra en la figura 5.2(a), en la que se puede notar que también en este caso todos los puntos se disponen aproximadamente sobre una curva universal. La dispersión alrededor de dicha curva se puede apreciar en la figura 5.2(b), donde graficamos $\mathcal{C}(m, \alpha)/\bar{\mathcal{C}}(\alpha)$ ($\bar{\mathcal{C}}(\alpha)$ es el promedio de $\mathcal{C}(m, \alpha)$ a α fijo). Se puede apreciar que para $\alpha \approx 1$ la dispersión es mayor que para \mathcal{T} , llegando aproximadamente al 40%, pero disminuye rápidamente con α , y para $\alpha \gtrsim 1.5$ es alrededor de un 5%. Al igual que para \mathcal{T} , la dispersión de \mathcal{C} muestra tendencias sistemáticas no atribuibles a los errores numéricos en la determinación de \hat{c} .

Resulta destacable que los simples cambios de escala dados por (5.1) y (5.2) absorban gran parte de la dependencia que de m tienen el tiempo de espera y la velocidad de arranque del frente. Si bien no disponemos aún de una justificación teórica de estos resultados, los mismos pueden ser de utilidad práctica dado que permiten obtener fácilmente buenas estimaciones de t_w y \hat{c} en casos que no fueron considerados en este trabajo, sin la necesidad

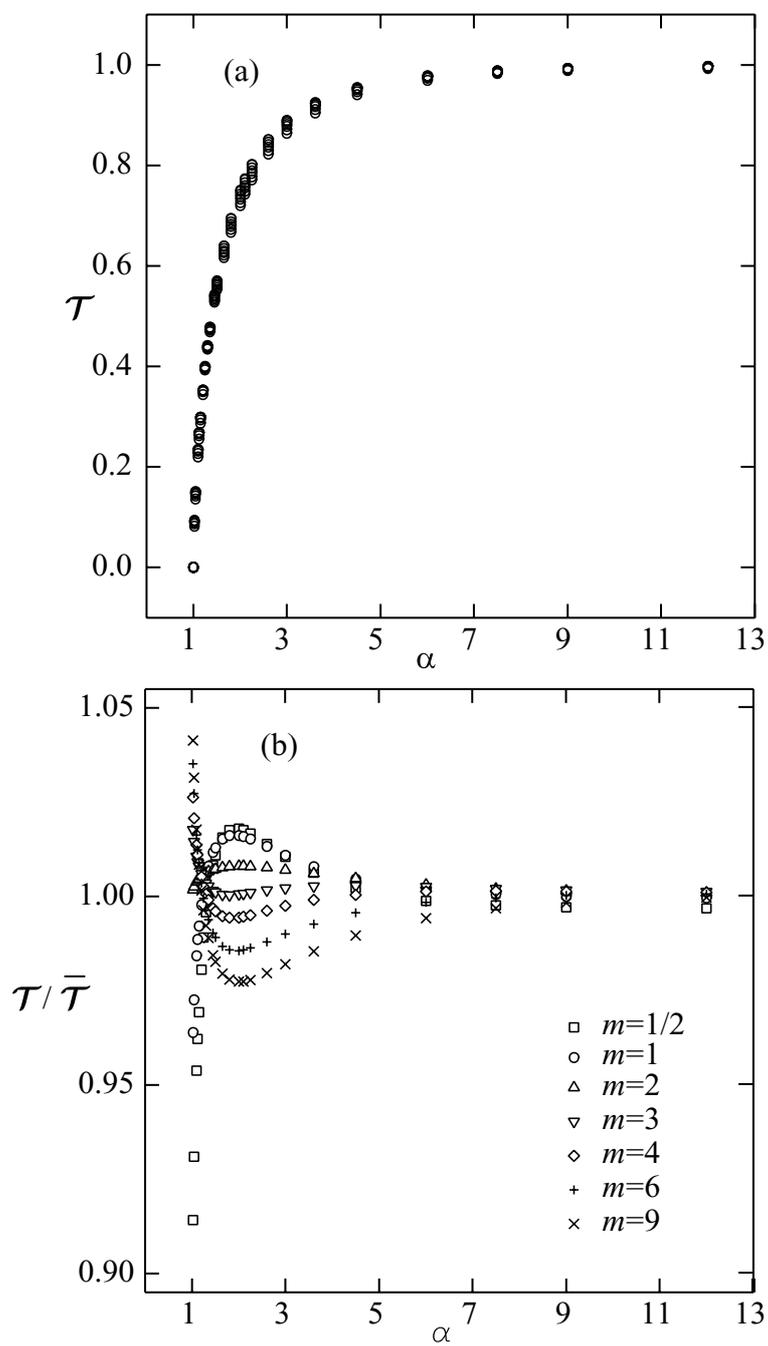


Figura 5.1: Tiempo de espera reducido: (a) $\mathcal{T}(m, \alpha)$ para todos los valores de m considerados en este trabajo, (b) $\mathcal{T}(m, \alpha)/\bar{\mathcal{T}}(\alpha)$.

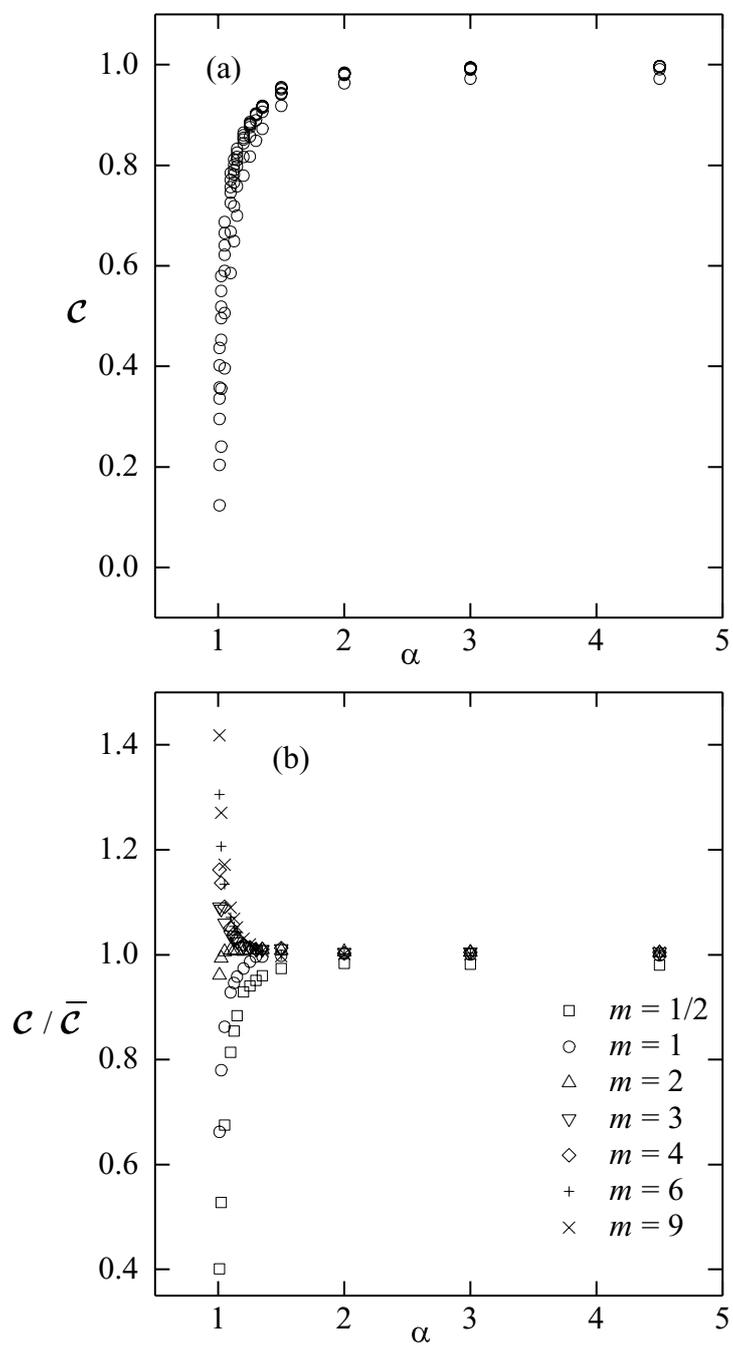


Figura 5.2: Velocidad de arranque reducida del frente: (a) $\mathcal{C}(m, \alpha)$ para todo los m considerados en este trabajo, (b) $\mathcal{C}(m, \alpha)/\bar{\mathcal{C}}(\alpha)$.

de llevar a cabo largos cálculos numéricos.

5.2 Propiedades generales de las soluciones

En conclusión, todos los resultados presentados están en concordancia con la teoría y extienden los resultados previos obtenidos para $m = 3$ y 1 por Gratton y Vigo (1998) y Perazzo et al. (1999) respectivamente. Durante la etapa de espera se desarrolla un corner layer, que se intensifica progresivamente a medida que se desplaza hacia el frente que espera. El frente comienza a moverse cuando es alcanzado por el corner layer y la velocidad de arranque del frente coincide con la del corner layer, de modo que el movimiento del frente es la prolongación del movimiento del corner layer. Las condiciones iniciales (1.5) en todos los casos llevaron a soluciones que desarrollan un único corner layer. Durante el período de espera, el aspecto más interesante de la solución es el corner layer, cuyo comportamiento determina la magnitud del tiempo de espera y de la velocidad de arranque del frente. Para un dado valor fijo de α , para m más grande el corner layer se forma más temprano pero más cerca del frente, por lo tanto su velocidad disminuye con m .

5.3 Propiedades asintóticas de las soluciones

Las asintóticas de las soluciones cerca del frente y próximo al momento del arranque son autosemejantes de Segunda Especie y consisten de dos dominios cuyo extensión depende de m y α , y varía con el tiempo. Detrás del corner layer hay un dominio en el cual la solución muestra una autosemejanza del

tipo LOT con un δ que depende de m y α ; en una escala logarítmica la extensión de este dominio aumenta a medida que se acerca el momento del arranque. Esta autosemejanza LOT es del tipo L, excepto cuando α es muy cercano a 1 en cuyo caso es del tipo S. Además, muy hacia el final del período de espera, cuando el valor de η por delante del corner layer es muy pequeño, aparece inmediatamente detrás del corner layer un pequeño dominio donde la solución deja de comportarse como una asintótica del tipo LOT, y muestra un comportamiento asintótico del tipo onda viajera. A medida que se aproxima el arranque del frente, el dominio de la onda viajera se extiende a expensas del dominio donde el comportamiento de la solución es del tipo LOT. Para α fijo, el régimen LOT corresponde a un valor de δ que es creciente con m , y el dominio de la onda viajera es más pequeño.

Como fuera explicado en la Sección 2.3.2, una solución LOT tipo L presenta una sucesión infinita de corner layers. Sin embargo, nuestras soluciones presentan siempre un único corner layer, aún cuando desarrollan un régimen asintótico LOT tipo L. Este peculiar comportamiento fue explicado en Gratton y Vigo 1998. La escala temporal para las modificaciones del perfil es $T \approx L^2 h^{-m}$, donde L es la escala de variación de h . Con un perfil inicial del tipo (1.5), resulta $T = T(x) \approx x^{-2\alpha}$. Entonces cerca de $x = 0$ (y adelante del primer corner layer) el perfil cambia muy lentamente ($T(x) \gg t_w$ para $x \ll 1$). En consecuencia, el primer corner layer llega al frente (dando fin al período de espera) demasiado pronto como para que se desarrolle el segundo corner layer. Esta es la razón por la cual sólo una parte de la solución L está presente en el comportamiento asintótico de nuestro problema.

5.4 Conclusiones

La presencia de una asintótica del tipo onda viajera en las cercanías del corner layer y muy cerca del arranque del frente era esperado a partir de argumentos teóricos, y se puede entender por medio del simple argumento dado en la Sección 4.4. Por otra parte, la evidencia numérica indica que, además de la onda viajera, la asintótica del tipo LOT está siempre presente en todas nuestras soluciones, sugiriendo así que las soluciones autosemejantes LOT son atractores. Debemos resaltar que *a priori* nada garantizaba este resultado, que aún aguarda por una explicación teórica.

En líneas generales podemos afirmar que t_w y \hat{c} son funcionales continuas y regulares del parámetro de no linealidad m y de las condiciones iniciales, siempre y cuando, se entiende, éstas sean del tipo que da lugar a un t_w que depende de las propiedades globales de la condición inicial. Esto es, *no* hay valores críticos de m o de α (u otras características de la condición inicial) para los cuales t_w y \hat{c} varíen de manera discontinua o sufran bruscos cambios de tendencia. Esto mismo se puede aseverar respecto de las propiedades de las asintóticas, es decir la extensión de los dominios en los cuales el comportamiento es del tipo LOT u onda viajera, el valor del exponente de autosemejanza δ , etc., y de las propiedades del corner layer, como su lugar y tiempo de formación y su posterior evolución.

Finalmente, los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser de utilidad a los fines de encontrar por interpolación (evitando así costosos cálculos numéricos) valores de t_w y \hat{c} para valores de m y α no usados aquí, por medio de las ecuaciones (5.1) y (5.2) y las figuras 5.1 y 5.2. Nuestros resultados también pueden ser de utilidad para encontrar cotas más restrictivas

que las hasta ahora conocidas para t_w en problemas generales de condiciones iniciales, tal como fue explicado y ejemplificado en las Secciones 4.5 y 4.5.1 respectivamente.

Referencias

- Aronson, D. G. (1970). Regularity properties of flows through porous media: A counterexample. *SIAM J. Appl. Math.* 19, 229.
- Aronson, D. G., L. A. Caffarelli, y S. Kamin (1983). How an initially stationary interface begins to move in porous medium flow. *SIAM J. Math. Anal.* 14, 639.
- Aronson, D. G., L. A. Caffarelli, y J. L. Vázquez (1985). Interfaces with a corner point in one-dimensional porous medium equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 38, 375.
- Barenblatt, G. I. (1952). On some unsteady motions of fluids and gases in a porous medium. *Prikl. Mat. i Mekh.* 16 (1), 67.
- Barenblatt, G. I. (1979). *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*. Consultant Bureau, New York y London.
- Barenblatt, G. I., V. M. Entov, y V. M. Ryzhik (1990). *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Barenblatt, G. I. y Y. B. Zel'dovich (1957). On the dipole-type solution in problems of unsteady gas filtration in the polytropic regime. *Prikl. Mat. i Mekh.* 21, 718.
- Barenblatt, G. I. y Y. B. Zel'dovich (1972). Self-similar solutions as inter-

- mediate asymptotics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 4, 295.
- Borland, L. (1998). Microscopic dynamics of the nonlinear fokker-planck equation: A phenomenological model. *Phys. Rev. E* 57, 6634.
- Buckmaster, J. (1977). Viscous sheets advancing over dry beds. *J. Fluid Mech.* 81, 735.
- Compte, A. y D. Jou (1996). Non-equilibrium thermodynamics and anomalous diffusion. *J. Phys. A* 29, 4321.
- Drazer, G., H. S. Wio, y C. Tsallis (2000). Anomalous diffusion with absorption: Exact time-dependent solutions. *Phys. Rev. E* 61, 1417.
- Eagleson, P. S. (1970). *Dynamic Hydrology*. McGraw-Hill.
- Gilding, B. H. y L. A. Peletier (1977a). On a class of similarity solutions of the porous media equations. *J. Math. Anal. Appl.* 55, 351.
- Gilding, B. H. y L. A. Peletier (1977b). On a class of similarity solutions of the porous media equations ii. *J. Math. Anal. Appl.* 57, 522.
- Gratton, J. y F. Minotti (1990). Self-similar viscous gravity currents: phase-plane formalism. *J. Fluid Mech.* 210, 155.
- Gratton, J., F. Minotti, y S. M. Mahajan (1999). Theory of creeping gravity currents of a non-newtonian liquid. *Phys. Rev. E* 60 (6), 6960.
- Gratton, J., E. Rossello, y J. Diez (1992). Physical modeling of free flows: waiting-time behavior. *Ac. Nac. Ciencias Exactas Fís. y Nat.* 8, 51.
- Gratton, J. y C. L. M. Vigo (1998). Evolution of self-similarity, and other properties of waiting-time solutions of the porous medium equation: the case of viscous gravity currents. *European J. Appl. Math.* 9, 327.
- Grundy, R. E. (1979). Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation. *Quart. Appl. Math.* 37, 259.

- Gurtin, M. E. y R. C. MacCamy (1977). On the diffusion of biological populations. *Math. Biosc.* 33, 35.
- Huppert, H. E. (1982). The propagation of two-dimensional viscous gravity currents over a rigid horizontal surface. *J. Fluid Mech.* 121, 43.
- Kálnay de Rivas, E. (1972). On the use of nonuniform grids in finite-difference equations. *J. Comput. Phys.* 10, 201.
- Kamin, S. (1980). *Continuous groups of transformations of differential equations; applications to free boundary problems*. En E. Magenes (ed.), Free Boundary Problems, Tecnoprint, Roma.
- Kath, W. L. y D. S. Cohen (1982). Waiting-time behavior in a nonlinear diffusion equation. *Stud. Appl. Math.* 67, 79.
- Knerr, B. F. (1977). The porous medium equation in one dimension. *Trans. Am. Math. Soc.* 234, 381.
- Lacey, A. A. (1983). Initial motion of the free boundary for a non-linear diffusion equation. *IMA J. Appl. Math.* 31, 113.
- Lacey, A. A., J. R. Ockendon, y A. B. Tayler (1982). "waiting-time" solutions of a nonlinear diffusion equation. *J. Appl. Math.* 42, 1252.
- Larsen, E. W. y G. C. Pomraning (1980). Asymptotic analysis of nonlinear marshak waves. *SIAM J. Appl. Math.* 39, 201.
- Malacarne, L. C., R. S. Mendes, I. T. Pedron, y E. K. Lenzi (2001). Nonlinear equation for anomalous diffusion: Unified power-law and stretched exponential exact solution. *Phys. Rev. E* 63, 030101(R).
- Marino, B. M., L. P. Thomas, R. Gratton, J. A. Diez, S. Betelú, y J. Gratton (1996). Waiting-time solutions of a nonlinear diffusion equation: Experimental study of a creeping flow near a waiting front. *Phys. Rev.*

- E* 54, 2628.
- Marshak, R. E. (1958). Effect of radiation on shock wave behavior. *Phys. Fluids* 1, 24.
- Mayergoyz, I. D. (1998). *Nonlinear Diffusion of Electromagnetic Fields*. Academic Press, San Diego.
- Muskat, M. (1937). *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*. McGraw-Hill.
- Pattle, R. E. (1959). Diffusion from an instantaneous point source with a concentration-dependent coefficient. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 12, 407.
- Peletier, L. A. (1981). *Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences*. Pitman Adv. Pub. Prog., Boston.
- Perazzo, C. A., C. L. M. Vigo, y J. Gratton (1999). Soluciones con tiempo de espera para flujos gaseosos isotérmicos en un medio poroso: I soluciones numéricas. *Anales AFA* 9, 327.
- Pert, G. J. (1977). A class of similar solutions of the non-linear diffusion equation. *J. Phys. A* 10 (4), 583.
- Plastino, A. R. y A. Plastino (1995). Non-extensive statistical mechanics and generalized fokker-planck equation. *Physica A* 222, 347.
- Polubarinova-Kochina, P. Y. (1962). *Theory of Ground Water Movement*. Princeton Univ. Press.
- Rosenau, P. (1995). Fast and superfast diffusion processes. *Phys. Rev. Lett.* 74 (7), 1056.
- Thomas, L. P., J. A. Diez, B. M. Marino, R. Gratton, y J. Gratton (1991). Corrientes viscogravitatorias con frentes que esperan. *Anales AFA* 3,

213.

Tomoeda, K. y M. Mimura (1983). Numerical approximations to interface curves for a porous media equation. *Hiroshima Math. J.* 13, 273.

Vázquez, J. L. (1983). Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of gas in a porous medium. *Trans. Amer. Math. Soc.* 277, 507.

Vázquez, J. L. (1984). The interface of one-dimensional flows in porous media. *Trans. Amer. Math. Soc.* 285, 717.

Zel'dovich, Y. B. y A. S. Kompaneets (1950). *On the theory of heat propagation for temperature dependent thermal conductivity*. Collection Commemorating the 70th Anniv. of A. F. Joffe Izdat. Akad. Nauk SSSR.

Zel'dovich, Y. B. y Y. P. Raizer (1966). *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Academic Press, New York.

Agradecimientos

Finalmente, expresaré aquí mi gratitud hacia todos aquellos que de distintas formas han contribuido a esta Tesis.

En primer lugar deseo manifestar mi agradecimiento a mi director de Tesis, el Dr. Julio Gratton. Debo decir que ha sido un enorme placer trabajar con él, pero sobre todo lo ha sido conocerlo. Considero un honor que Julio haya sido mi director.

A mi consejero de estudios, el Dr. Luis Bilbao, quiero agradecer su excelente predisposición para atender siempre mis consultas.

Aún no siendo formalmente un integrante del Infip, toda su gente me ha tratado como si lo fuera. En su condición de director del instituto agradezco al Dr. Fausto Gratton por esto, y le pido lo haga extensivo a los demás integrantes del Infip.

Agradezco a las autoridades de la Universidad Favaloro, quienes no sólo me han dado trabajo, además han hecho posible el privilegio de trabajar en lo que quiero. Debo decir que esto es mérito del Dr. Ricardo H. Pichel.

De todos los agradecimientos, el más profundo y entrañable es para mis

padres, quienes además de todo el amor y cariño que dos personas pueden dar, me han dado con gran esfuerzo una excelente educación que alcanza en esta Tesis su punto más alto. Hago extensivo este agradecimiento a mi querida hermana.

En relación a esta Tesis, le agradezco a mi adorada Daniela el enorme apoyo que siempre me brindó, y especialmente el empujón que me dió en la recta final. Hay muchas otras cosas que no tienen que ver con este trabajo por las que le estoy agradecido, aquí sólo mencionaré una: gracias por darle amparo a toda mi familia.

Le agradezco a Peter su enorme paciencia en permitir que mi tiempo lo dedique a trabajar en esta Tesis, en desmedro del trabajo que hacemos juntos.

Mi oficina, el lugar donde hice casi todo el trabajo, es un lugar cálido y cordial. Es así debido a que la comparto con Agustín. Gracias por eso.

A mi amigo Claudio, quien en los comienzos fue casi un codirector, le agradezco entre otras cosas que por él decidí que Julio fuera mi director.

Finalmente, me siento agradecido por haber tenido acceso a la educación pública y gratuita que mi país me brindó.