EL SENTIMIENTO ESTÉTICO DE LOS MATEMÁTICOS

Acercamiento a la belleza matemática

¿Es posible hablar de belleza en una disciplina como la Matemática, habitualmente clasificada entre las ciencias “duras”? En este artículo se propone un breve recorrido informal por algunos de sus variados temas, desde las clásicas construcciones de la geometría hasta otros resultados un tanto más inquietantes, que revelan en ella un carácter inesperado... casi podría decirse, un carácter romántico.

PABLO AMSTER
Doctor en Matemáticas, UBA. Profesor Adjunto del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA. Investigador del Conicet. Es autor de numerosos trabajos de investigación científica, y colaboró en diferentes proyectos en universidades argentinas y extranjeras. Además, dicta con frecuencia conferencias y seminarios de divulgación, y escribe textos destinados al público no matemático. Recientemente ha publicado el libro La matemática como una de las bellas artes (Ed. Siglo XXI)..

Contempladas en sus auténticos valores, las matemáticas no sólo poseen verdad sino suprema belleza.
Bertrand Russell

Quizá resulte asombroso el oír invocar a la sensibilidad a propósito de las demostraciones matemáticas, que al parecer no pueden interesar más que a la inteligencia. Esto equivaldría a olvidar el sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números, de la elegancia geométrica. Es un verdadero sentimiento estético que conocen todos los matemáticos. Y esto es ciertamente sensibilidad.
H. Poincaré

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un maestro del diseño.
G. H. Hardy

En este artículo se exploran algunas de las más curiosas manifestaciones de la belleza. No se trata, en efecto, de referirnos a aspectos estéticos asociados a la Música o a las artes visuales, sino a una forma de belleza más abstracta y, en cierto modo, más austera: la belleza matemática.

En primer término, debemos convenir que las exaltadas citas del epígrafe sugieren atributos de la Matemática que no suelen tenerse presentes cuando uno lucha, pongamos por caso, con la función arco-tangente. Para muchos, el tránsito por la Matemática ha sido más bien penoso; si intentamos convencerlos de que esa incomprensible mezcla de letras, números y postulados tiene algo que ver con el Arte, nos veremos en una seria dificultad. Por eso, a fines de entender en qué consiste la mentada “belleza matemática”, conviene antes revisar un poco los fundamentos de dicha disciplina.

Una ciencia que no es ninguna ciencia

Tradicionalmente se describe a la Matemática como una de las ciencias formales; un universo poblado de ideas abstractas que se rige por los más severos postulados. Para la mayoría de la gente, tanta rigidez no da cabida siquiera a la más mínima vacilación. Y eso por no hablar de aspectos más ligados a la sensibilidad: ¿qué puede haber de emotivo en la propiedad distributiva?

En tal contexto, parece una incoherencia absoluta la frase del ruso Georg Cantor, genial creador de la teoría de conjuntos: “La esencia de la matemática es su libertad”. Sin embargo, los sucesivos derrumbes de la noción de verdad o, mejor dicho, de verdadera verdad, han llevado a la Matemática a un lugar acaso insospechado hasta hace poco más de un siglo. Lejos de seguir pensándola como la ciencia de la verdad por excelencia, los matemáticos comenzaron a buscar nuevas formas de entenderla y llegaron a conclusiones como la que sigue, proveniente de la pluma del inglés Bertrand Russell: “La Matemática es una ciencia en donde nunca se sabe de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero”.

Más tarde la propia idea de “ciencia” fue puesta en tela de juicio; son muchos los matemáticos que han comenzado a considerarla casi como una forma de Arte. Aunque quizá la más extraordinaria síntesis de lo que constituye su verdadera esencia se puede encontrar en la siguiente cita del francés Poincaré: “La Matemática es el arte de llamar de la misma manera a cosas distintas”.

También existe un grupo de matemáticos, denominados formalistas, para quienes la vinculación de la Matemática con toda clase de realidad extramatemática es irrelevante. Como consecuencia de esta postura la han llegado a definir, lisa y llanamente, como un lenguaje bien hecho. La simplificación puede parecer exagerada, pero refleja cierto aspecto fundamental de esta actividad, un tanto extraña, que básicamente consiste en demostrar teoremas a partir de un puñado de axiomas.

Bajo el pretexto de efectuar un recorrido por algunos de sus temas, en este artículo se asumen las consecuencias, no siempre plácidas, de “hacer un lenguaje”. Con ello se propone una suerte de continuación de la idea anterior; algo así como decir: la Matemática es un lenguaje bien hecho... y a lo hecho, pecho.

Clásicos y románticos

Algunas de las ideas introducidas en la sección previa nos permiten justificar el propósito que nos guía desde el comienzo: si hay quienes consideran a la Matemática como un arte, ¿por qué no intentar sobre ella alguna apreciación de orden estético?

El matemático francés Le Lionnais se propuso una vez un fin semejante, y en forma muy general separó a las formas de belleza matemática bajo dos grandes rótulos: clasicismo y romanticismo. El primero se entiende a partir de la forma perfecta, acabada, elegante; el segundo, en términos de lo caótico, lo inalcanzable o lo imprevisto. Le Lionnais describe ambas tendencias de la siguiente forma:

“Una proposición matemática es de una belleza clásica cuando ella nos colma, ya sea por su capacidad de análisis, sea porque permita unificar una variedad, sea porque asocie estas dos impresiones en una construcción armoniosamente dispuesta”.

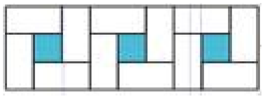
En cambio, la belleza romántica se basa en:
“...el culto de las emociones violentas, del no-conformismo y de lo extravagante”.
En las siguientes secciones daremos unos sencillos ejemplos para ilustrar esta

clasificación.

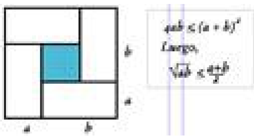
El que se fue a Sevilla…

Nuestro ejemplo de belleza clásica tiene un protagonista acaso inesperado: Carlos V de España. Podemos imaginar que el ilustre personaje se encuentra algo alicaído, quizá como consecuencia de algún traspié militar o alguna de esas cosas que preocupan a los soberanos. O, mejor aún, que se encuentra cabizbajo, pues tal es la postura corporal que le permitirá hallar consuelo en el embaldosado del salón que lleva su nombre en el Real Alcázar de Sevilla.

¿Qué clase de consuelo? Consuelo matemático, ciertamente. Y, ya que hemos imaginado que su moral se hallaba por el piso, conviene señalar que el entramado de dicho piso presenta más o menos el siguiente aspecto:

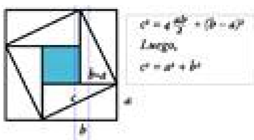


Pero entonces, una observación de lo más elemental permite demostrar una importante propiedad algebraica, el hecho de que la denominada media geométrica de dos números es siempre menor o igual que la media aritmética, o promedio común:



La conclusión parece trivial, pues resulta de observar simplemente que los cuatro rectángulos de área ab en realidad no llegan a cubrir el cuadrado de lado a + b. Sin embargo, si efectuamos un pequeño agregado a este singular diseño, lo que obtenemos resulta a todas luces más interesante. Se trata de la famosa prueba que dio Baskhara de un célebre teorema de la Antigüedad: el teorema de Pitágoras [1].

En efecto, basta observar en la figura que el cuadrado de lado c consiste en la suma de cuatro de los triángulos y el pequeño cuadrado central. Se hace uso, en realidad, de la conocida identidad del binomio, (b - a)2 = b2 + a2 - 2ab, que también puede demostrarse a partir de la contemplación de tan nobles suelos. Este es un ejercicio que queda para el lector; bien mirado, puede transformarse en la excusa perfecta para planear una visita a Sevilla [2].



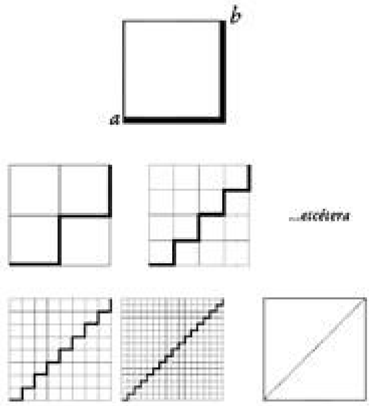
Beleza nao tem fim

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito.

J. L. Borges, Avatares de la tortuga.

El poeta Baudelaire afirmó alguna vez que la irregularidad, es decir, lo inesperado, la sorpresa o el estupor son elementos esenciales y característicos de la belleza. Tal descripción responde muy bien a lo que hemos englobado, a grandes rasgos, como belleza romántica. Para el romanticismo la acción precede al conocimiento, lo que no descarta además cierto espíritu irracional.

Ante este panorama, hay un candidato matemático a llevar las banderas del romanticismo que resulta casi indiscutible. Se trata del infinito, del cual el alemán Hilbert ha dicho: “Ningún otro problema ha perturbado tanto el espíritu del hombre”. El ejemplo que presentaremos es muy elemental, aunque lleva implícita la delicada noción de límite, y se asemeja en su construcción a ciertas curvas que la tradición ha dado en llamar “patológicas”, o incluso “monstruosas”: líneas (vale decir, unidimensionales) continuas que llenan todo el espacio, o que no tienen tangente en ningún punto, etc. Nuestra construcción es bastante más modesta, y francamente no muy aterradora, aunque tiene la ventaja de que resulta muy fácil de entender. Quizá podamos pensarla entonces como uno de esos monstruos bastante más afables que aparecen en los cuentos infantiles.
El proceso se define por etapas; comencemos por una simple línea que recorre dos lados de un cuadrado para unir los dos vértices opuestos a y b:



El próximo paso consiste en partir el cuadrado en cuatro y avanzar por esta cuadrícula según el criterio anterior. Luego repetimos el procedimiento, y así sucesivamente:

En realidad, cada una de estas etapas se parece a un paseo por una ciudad cuadriculada: el ejemplo ideal sería la ciudad de La Plata, aunque sin las consabidas diagonales. Ahora bien, por más que el número de manzanas de nuestras ciudades imaginarias vaya en aumento, la distancia total recorrida es siempre la misma, el doble de la longitud L del lado original. Sin embargo, a medida que la cuadrícula se hace más fina, el paseo se asemeja en realidad cada vez más a la diagonal; en verdad, puede decirse con todo rigor que los sucesivos recorridos tienden a ella cuando el número de pasos tiende a infinito.

Pero he aquí que, según dijimos, la longitud de cada recorrido es siempre 2L, mientras que la medida de la diagonal, usando el teorema “clásico” ya mencionado, es un número menor; más precisamente =2L. Ahora bien, si los recorridos tienden a la diagonal, ¿no deberían ambas longitudes ser iguales? A simple vista, parece paradójico; dejamos al lector la tarea de encontrar la “falla”. Para su tranquilidad, debemos decir que la paradoja no es tal; se trata simplemente de haber jugado en forma no del todo honesta con esa romántica entidad matemática que es el infinito.

…y sin embargo, concluye

Después de haber hablado del infinito, puede parecer un contrasentido pretender una conclusión de este trabajo, aunque vale la pena intentarlo.

Hemos presentado unos pocos ejemplos, apenas un esbozo, de la belleza matemática según la clasificación propuesta por Le Lionnais. Una clasificación, cabe aclararlo, que no aspira a ser profunda ni reviste una gran seriedad desde el punto de vista de la Estética. Pero ayuda a transmitir ese intransmisible "…sentimiento estético que conocen todos los matemáticos", que tan bien se describe en la frase de Poincaré del epígrafe. En cualquier caso, tal vez nuestro heterodoxo empleo de los términos "clasicismo" y "romanticismo" pueda justificarse si tenemos en cuenta que, al hacerlo, hemos llamado de la misma forma a cosas distintas. Al menos en ese sentido, hemos actuado como matemáticos.

Notas

[1] Vale la pena comentar que Baskhara, astrónomo y matemático hindú, solía dar como única explicación para sus teoremas unas lacónicas figuras acompañadas de un imperativo casi terminante: ¡Mira! En cambio, sus problemas eran planteados en un lenguaje mucho más expresivo, que justifica que aquella época de la Matemática fuera denominada "época de la poesía". He aquí, por ejemplo, uno de los ejercicios que el lector podrá resolver mientras descansa recostado entre los bambúes:
"La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un jardín. Una abeja hembra con un macho quedan encerrados en una flor de loto, que los seduce por su dulce perfume. Los 8/9 del enjambre quedaron atrás. Dime el número de abejas".
[2] Cabe aclarar que, más allá de que los rectángulos del embaldosado presentan dimensiones bien específicas (el doble de largos que de anchos), las anteriores "demostraciones" valen para valores arbitrarios de los lados a y b.